Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1.

Sei $\omega := xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ eine 2-Form im $\mathbb{R}^3$. Offenbar ist dann $d\omega = 3dx \wedge dy \wedge dz$. Sei $W = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$. Sein Rand ∂W besteht aus 6 Seitenflächen $Q_1 \ldots Q_6$ mit Parametrisierungen $\varphi^i : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-u \\ 1 \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-u \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1-u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass die Parametrisierungen so gewählt sind, dass beim Umfahren von $[0,1]\times[0,1]$ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn das betreffende Bild-Quadrat Q_i auf der Würfeloberfläche „von außen betrachtet" ebenfalls entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn umfahren wird. Dies hat zur Folge, dass jede Kante zweimal „drankommt", und zwar in entgegengesetzten Richtungen.

Natürlich definiert man $\int_{\partial W} \omega := \int_{Q_1} \omega + \int_{Q_2} \omega + \int_{Q_3} \omega + \int_{Q_4} \omega + \int_{Q_5} \omega + \int_{Q_6} \omega$, und es ist z.B. $\int_{Q_1} \omega := \int_{[0,1]\times[0,1]} \left(\varphi^1\right)^* \omega$. Setzen wir kurz $\varphi := \varphi_1$ so erhalten wir

$$\varphi^* \omega = \varphi^* \left(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \right) = \varphi_1 d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 + \varphi_2 d\varphi_3 \wedge d\varphi_1 + \varphi_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

$\varphi_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = du \wedge dv$, so dass offenbar $\int_{Q_1} \omega := \int_{[0,1]\times[0,1]} \left(\varphi^1\right)^* \omega = \int_{[0,1]\times[0,1]} dudv = 1$.

Nach diesen Hinweisen berechne man $\int_{\partial W} \omega$ und verifiziere die Aussage des Stokesschen Satzes $\int_{\partial W} \omega = \int_W d\omega$ durch Berechnung des Integrals auf der rechten Seite. (Einfach!)

Aufgabe 2.

Sei B die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Ihr Rand ∂B ist die zweidimensionale Einheitssphäre S^2. Man verifiziere für die 2-Form aus Aufg. 1 wiederum den Stokesschen Satz $\int_{S^2} \omega = \int_B d\omega$, indem man beide Integrale berechnet. Die rechte Seite ist schnell erledigt. (Man muß nur wissen, dass das Volumen der Kugel $\frac{4}{3}\pi$ ist.)

a) Die linke Seite berechne man zunächst mit Hilfe der „Mercator"-parametrisierung $\Phi : \left]0, 2\pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ \to \ S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\Phi(\varphi,\theta) = (x,y,z) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta)$ durch Benutzung der Transformationsformel $\int_{S^2} \omega = \int_R \Phi^* \omega$ ($R = \left]0, 2\pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$).

Die Aufgabe besteht also im wesentlichen darin, $\Phi^*\omega$ zu berechnen; diese Rechnung ist wegen der komplizierteren Gestalt von Φ verglichen mit den simplen Abbildungen in Aufg. 1 schwieriger.

b) Man versuche, dasselbe Ergebnis zu erreichen mittels der Zentralprojektion $\Psi :]0,\infty[\times]0,2\pi[\to S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dabei ist $\Psi(r,\varphi) = (x,y,z)$ der Schnittpunkt der durch $(r\cos\varphi, r\cos\varphi)$ und den Nordpol $(0,0,1)$ gehenden Geraden mit der S^2. Man muß also erst einmal $\Psi(r,\varphi)$ berechnen, dann $\Psi^*\omega$ und dann $\int_{S^2}\omega = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[}\Psi^*\omega$. Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt also ein Integral der Form $\iint_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} f(r,\varphi)drd\varphi$, dessen Wert auszurechnen ist und hoffentlich mit dem in a) gefundenen übereinstimmt.

Ende Differentialformen!