Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1.

Gegeben sei das Vektorfeld $X(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}=-ye_1(x,y)+xe_2(x,y)$.

Man berechne mit Hilfe eines expliziten Computerprogramms für $\varepsilon=\frac{2\pi}{50}$ und $\varepsilon=\frac{2\pi}{100}$ jeweils mit dem Euler und dem Runge-Kutta Verfahren die Stromline $c(t)$ mit $c(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ für die Parameterwerte $0=t_0,\dots,t_N=2\pi$, $t_{i+1}=t_i+\varepsilon$. Man vergleiche die Endwerte $c(2\pi)$ in den vier verschiedenen Fällen und stelle nach Möglichkeit die Situation graphisch dar.

(Erinnerung: Beim Eulerverfahren sind die Stromlinienwerte gegeben durch $c(t_{i+1})=c_{i+1}=c_i+\varepsilon X(c_i)$, beim Runge-Kutta-Verfahren dagegen durch $c(t_{i+1})=c_{i+1}=c_i+\varepsilon\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6}$ mit $X_1=X(c_i)$, $X_2=X\left(c_i+\frac{\varepsilon}{2}X_1\right)$, $X_3=X\left(c_i+\frac{\varepsilon}{2}X_2\right)$, $X_4=X(c_i+\varepsilon X_3)$.)

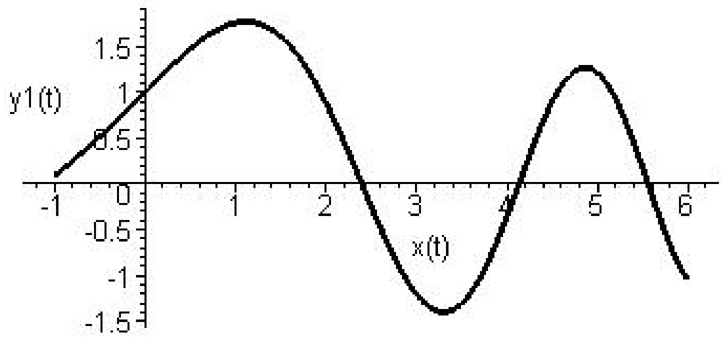
Aufgabe 2.

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung $y''=xy$.

a) Welches sind die Funktionen F_1,F_2 im zugehörigen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1(x,y_1,y_2)\\F_2(x,y_1,y_2)\end{pmatrix}$? Wie sieht das zugehörige Vektorfeld $X(x,y_1,y_2)$ im $\mathbb{R}^3$ aus, dessen Stromlinien $c(t)=\begin{pmatrix}t\\c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}$ man berechnen muß, um mit $c_1(t)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung 2. Ordnung zu erhalten.

b) Berechnen Sie mit dem Eulerverfahren $c(t)$ und stellen Sie für die Anfangswerte $c_1(0)=1$, $c_1'(0)=1$ die Lösungsfunktion $c_1(t)$ für $-1\le t\le 6$ graphisch dar.

Hinweis: mit Maple7 erhält man folgendes Bild für $c_1(t)$:



Aufgabe 3.* Modellierung eines Planetensystems

Sei $j(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. Man stelle sich vor, dass auf dieser Kreisbahn ein Großplanet um eine Sonne kreist, die im Nullpunkt eines zweidimensionalen Koordinatensystems sitzt. Ein dritter Körper, den man nun in das System einbringt, unterliegt der Anziehungskraft der beiden anderen. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass seine Masse so klein ist, dass sie das größere System selbst nicht stört. Die Anziehungskraft der Sonne auf den kleinen Körper sei außerdem 20 mal so groß wie die des Planeten, sie nehme mit dem Quadrat der Entfernung ab, also kann man sie ansetzen als proportional zu $\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}+\frac{1}{20}\frac{1}{(x+\cos t)^2+(y+\sin t)^2}\begin{pmatrix}-x-\cos t\\ -y-\sin t\end{pmatrix}$. Nach dem Prinzip Kraft gleich Masse mal Beschleunigung erhalten wir ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für die Bewegung des 3. Körpers. Dabei setzen wir den resultierenden Proportionalitätsfaktor gleich 1 und erhalten: $\begin{pmatrix}x''(t)\\ y''(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}+\frac{1}{20}\frac{1}{(x+\cos t)^2+(y+\sin t)^2}\begin{pmatrix}-x-\cos t\\ -y-\sin t\end{pmatrix}$. Dieses System verwandeln wir nach altem Rezept in ein größeres System 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\ y_1'(t)\\ x_2'(t)\\ y_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2(t)\\ y_2(t)\\ \frac{1}{x_1^2+y_1^2}\begin{pmatrix}-x_1\\ -y_1\end{pmatrix}+\frac{1}{20}\frac{1}{(x_1+\cos t)^2+(y_1+\sin t)^2}\begin{pmatrix}-x_1-\cos t\\ -y_1-\sin t\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Diesem System wiederum können wir ebenfalls nach altem Rezept das Vektorfeld

$$X(t, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \dfrac{1}{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{20} \dfrac{1}{\left(x_1 + \cos t\right)^2 + \left(y_1 + \sin t\right)^2} \begin{pmatrix} -x_1 - \cos t \\ -y_1 - \sin t \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^5$$

zuordnen.

Nach Euler oder Runge-Kutta lassen sich nun Stromlinien $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ berechnen.

In der graphischen Darstellung interessiert aber nur die von unserem „Probekörper“ beschriebene Kurve $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ im ursprünglichen $\mathbb{R}^2$.

Diese Bahnkurve soll für verschiedene Anfangsbedingungen berechnet bzw. graphisch dargestellt werden. (Oft wird der Körper aus dem System herausgeschleudert.)

Eine Anfangsbedingung $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ y_0 \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ entspricht genau der Vorgabe einer Position und Geschwindigkeit des Probekörpers.