Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1. Gauß-Seidel-Verfahren

a) gegeben sei das inhomogene Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Da die Matrix „diagonal dominant" ist, läßt sich das Gauß-Seidel-Verfahren anwenden.

Man setze also in einem geeigneten Computerprogramm $x^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$x^{n+1} := \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}\left(1-(a_{12}x_2^n + a_{13}x_3^n)\right) \\ \frac{1}{a_{22}}\left(2-(a_{21}x_1^n + a_{23}x_3^n)\right) \\ \frac{1}{a_{33}}\left(3-(a_{31}x_1^n + a_{32}x_2^n)\right) \end{pmatrix}$$ (Gesamtschrittverfahren) bzw.

$$x^{n+1} := \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}\left(1-(a_{12}x_2^n + a_{13}x_3^n)\right) \\ \frac{1}{a_{22}}\left(2-(a_{21}x_1^{n+1} + a_{23}x_3^n)\right) \\ \frac{1}{a_{33}}\left(3-(a_{31}x_1^{n+1} + a_{32}x_2^{n+1})\right) \end{pmatrix}$$ (Einzelschrittverfahren), bis Sie eine Genauigkeit von 4 Dezimalstellen hinter dem Komma erreicht haben. Vergleichen Sie die Effizienz der beiden Verfahren.

Übrigens kann man mit der additiven Zerlegung der Matrix A in eine Diagonalmatrix und eine obere und eine untere Dreiecksmatrix, also mit $A = U + D + O$ die obigen Rekursionsgleichungen in Matrixschreibweise kompakter so ausdrücken:
$x^{n+1} := D^{-1}\left(b-(U+O)x^n\right)$ (Gesamtschrittverfahren),
$x^{n+1} := D^{-1}\left(b-Ux^{n+1}-Ox^n\right)$ (Einzelschrittverfahren).
Die letzte Gleichung kann man offenbar umschreiben:
$$x^{n+1} := D^{-1}\left(b-Ux^{n+1}-Ox^n\right) \Rightarrow \left(D+U\right)x^{n+1} = b-Ox^n \Rightarrow x^{n+1} = \left(D+U\right)^{-1}\left(b-Ox^n\right)$$

b)* $f(x,y) := xy$ ist harmonisch in $\mathbb{R}^2$, d.h. *f* erfüllt die Laplace Gleichung
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Man betrachte nun innerhalb des Einheitsquadrats das Gitter $\left\{\left(\frac{k}{500},\frac{l}{500}\right) \mid 0 \le k,l \le 500\right\}$.
Zahlenwerte auf den Gitterpunkten bezeichnen wir mit x_{kl}. Setzen wir z.B.
$x_{kl} := f\left(\frac{k}{500},\frac{l}{500}\right)$, so hat man eine diskrete Version der Laplace Gleichung mit:

$$\frac{\left(x_{k+1,l}+x_{k,l+1}+x_{k-1,l}+x_{k,l-1}\right)-4x_{kl}}{\frac{1}{500}} \approx 0 .$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Werte von *f* im Innern des Einheitsquadrats bereits durch die Werte auf dem Rand des Quadrats bestimmt sind.

Man stelle dazu folgendes homogene lineare Gleichungssystem mit 501×501Variablen auf:

$$\left(x_{k+1,l}+x_{k,l+1}+x_{k-1,l}+x_{k,l-1}\right)-4x_{kl} = 0 \text{ falls } 0<k,l<500,$$
$$x_{kl} := f\left(\frac{k}{500},\frac{l}{500}\right) \text{sonst (d.h. am Rand) .}$$

Damit haben wir eine $501^2\times 501^2$ -Matrix , bei der in den meisten Zeilen 5 Einträge stehen: -4 auf der Diagonalen, +1 in den 4 benachbarten Zeilen. Die 2000 „Randzeilen“ haben lediglich den vorgegebenenEintrag $f\left(\frac{k}{500},\frac{l}{500}\right)$auf der Hauptdiagonalen. Damit ist das Gauß-Seidel-Einzelschrittverfahren anwendbar ($b=0$). Man beginne mit einem Startvektor x^0, in dem die „Randkoordinaten“ durch $x_{kl}{}^0 := f\left(\frac{k}{500},\frac{l}{500}\right)$ für $k=0 \vee k=500 \vee l=0 \vee l=500$, und die „inneren Variablen“ durch $x^0{}_{kl}$:=0 für $0<k,l<500$ vorgegeben sind. Man läßt die Gauß-Seidel Iteration jetzt nur über die inneren Variablen laufen, für die äußeren hat man ja bereits die vorgegebene Lösung.

Man vergleiche nun die Lösung, die man durch das Gauß-Seidel-Verfahren erhält mit der vorgebenen Funktion f !

Natürlich hätte man von einer beliebigen anderen harmonischen Funktion ausgehen können. Man schließt, daß solche Funktionen innerhalb eines Gebiets bereits durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt sind, bzw. daß man zu beliebigen Randwerten eine harmonische Funktion konstruieren kann, die diese Randwerte besitzt.

Aufgabe 2

Man denke sich im Einheitsquadrat die Linien eines quadratischen Gitters der Maschenweite ε. Man zeichne das Bild dieses Gitters unter der komplex differenzierbaren Abbildung $z \to \exp(2\pi z)$. (Man beachte $\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$ und $\exp iy = \cos y + i \sin y$).
Wie sieht das Bildgitter aus für $z \to z^3$?

Freiwillig: Dieselbe Aufgabe mit Computereinsatz? für $z \to \sin(2\pi z)$ bzw. für beliebige Abbildungen; im übrigen ist $\sin z := \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$.

Aufgabe 3

Man berechne das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$, wobei γ den Kreis mit Radius 1 um 0 beschreibt. Man vergleiche den Wert mit der zugehörigen Riemannsumme $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}(a_{i+1} - a_i)$.
Dabei seien die Punkte $a_0 \ldots a_N$ (N=500, $a_0 = a_n$) äquidistant über die Kurve verteilt.

Zusatzfrage: Hätten Sie das Ergebnis mit der Cauchyschen Integralformel voraussagen können?

Aufgabe 4

Man betrachte die Funktionen $e_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Man führe den Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsprozeß bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ für e_0, e_1, e_2, e_3 durch. Wie sehen die 4 resultierenden bezüglich dieses Skalarprodukts orthonormalen Funktionen aus?