Definitionen und Sätze zur Integralrechnung

Um Kompatibilität mit den für die höherdimensionale Theorie sinnvollen Definitionen zu erlangen, werden hier die für die eindimensionale Theorie in der Vorlesung gegebenen Definitionen etwas modifiziert.

Zunächst setze man für $\varepsilon > 0$ $\mathfrak{M}_\varepsilon := \{[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \mid n \in \mathbb{Z}\}$, d.h. jedes $I \in \mathfrak{M}_\varepsilon$ ist ein abgeschlossenes Intervall der Länge ε, und die in $\mathfrak{M}_\varepsilon$ enthaltenen Intervalle überdecken zusammen die Ebene.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
f heißt Riemann-integrierbar, wenn die folgenden Grenzwerte existieren und gleich sind:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_\varepsilon \\ G \cap Q \neq \emptyset}} \varepsilon \sup_{q \in Q} f(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_\varepsilon \\ G \cap Q \neq \emptyset}} \varepsilon \inf_{q \in Q} f(q) .$$

Diesen gemeinsamen Grenzwert von „Obersummen“ und „Untersummen“ nennt man dann „das Riemann-Integral“ von f auf dem Intervall $[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx$. In der geometrischen Anschauung ist dies die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei Flächenteile oberhalb der Achse positiv und unterhalb der Achse negativ zu werten sind.

Man zeigt leicht, dass die Summe zweier Riemann-integrierbarer Funktionen wieder Riemann integrierbar ist, und dabei gilt $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, außerdem hat man für $c \in \mathbb{R}$: $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$. Ist $a < c < b$, so gilt auch $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Sehr wichtig ist die Tatsache, dass eine auf $[a,b]$ stetige Funktion Riemann-integrierbar ist. Setzt man für eine auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion f

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt ,$$

so erhält man eine auf $[a,b]$ stetige Funktion F, die im offenen Intervall $]a,b[$ differenzierbar ist, wobei gilt:

$$\forall x \in]a,b[: \quad F'(x) = f(x) \quad .$$

Dies ist der sogenannte Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Gilt für eine auf $[a,b]$ gegebene Funktion G $\forall x \in]a,b[: \; G'(x) = f(x)$, so heißt G Stammfunktion von f.
Die Differenz zweier Stammfunktionen von f hat Ableitung Null und ist daher konstant. Also gilt für eine eine beliebige Stammfunktion G von f

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Mit

$$\int f(x)dx$$

ist eine beliebige Stammfunktion von f gemeint; man nennt diesen Ausdruck auch *unbestimmtes Integral*.

Der durch den Hauptsatz gegebene Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration erlaubt die Umformulierung diverser Differentiationsregeln zu Integrationsregeln. Ist beispielsweise $n \in \mathbb{N}$ $F(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$, so erhalten wir durch Differenzieren $F'(x) = f(x)$, also ist F Stammfunktion von f, also $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ und $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Es ist in diesem Zusammenhang üblich, Differenzen wie $\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$ als $\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$ zu schreiben, allgemein

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Die Produktregel der Differentiation $(uv)' = u'v + v'u$ übersetzt sich also in

$$uv = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \text{ bzw.}$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Dies nennt man auch *partielle Integration*. Sie kommt zur Anwendung in Beispielen wie $\int x \sin x \; dx = -x\cos x - \int \cos x \; dx = -x\cos x - \sin x$.

Die Kettenregel der Differentiation $(G \circ f)'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$ wird zu

$$\int g(f(x))\, f'(x)dx = G(f(x)) \text{ bzw.}$$

$$\int_a^b g(f(x))\, f'(x)dx = G(f(x))\Big|_a^b = G(y)\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\; dy$$

der sogenannten *Substitutionsregel*. Beispiele wurden in den Übungen behandelt. Man muß in einem gegebenen Beispiel herausfinden, ob ein Integral als die linke oder die rechte Seite der unteren Gleichung zu interpretieren ist und man die jeweils andere Seite vielleicht leichter berechnen kann.

Erwähnt seien noch

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x|,$$

was sich sofort aus den zugehörigen Differentiationsformeln ergibt.

Eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ist bekanntlich innerhalb des Konvergenzintervalls $]x_0-R, x_0+R[$ [1]beliebig oft differenzierbar. Man kann aber auch gliedweise integrieren und erhält eine Stammfunktion $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x-x_0)^n$ mit demselben Konvergenzradius.

Wird fortgesetzt.

[1] Der Konvergenzradius R berechnet sich z.B. als $R=\underline{\lim}_{n\to 0} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$