Definitionen, Aussagen und Ergänzungen zur Topologie

Ist M eine Menge, so heißt $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{P}(M)$ *Topologie auf* M, wenn gilt:
1. $\emptyset, M \in \mathfrak{O}$
2. $U, V \in \mathfrak{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{O}$
3. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen in $\mathfrak{O}$, so folgt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{O}$.

Ist $\mathfrak{O}$ eine Topologie auf M, so heißt $(M, \mathfrak{O})$ *topologischer* Raum.
Geht aus dem Kontext hervor, von welcher Topologie auf M die Rede ist, so spricht man von M selbst als topologischem Raum und nennt die Elemente von $\mathfrak{O}$ *offene Mengen.* Ist $x_0 \in U$ und U offen, so nennt man U eine *offene Umgebung von* x_0, und schreibt häufig $U(x_0)$.

Ist (M, d) ein metrischer Raum, so nennen wir eine Teilmenge $U \subset M$ „*offen*“, wenn gilt: $\forall x_0 \in U \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \forall x \in M: \ d(x, x_0) < \varepsilon \rightarrow x \in U$, oder – was dasselbe bedeutet: $\forall x_0 \in U \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Dabei ist $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in M \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ die „*offene Kugel mit Radius* ε *um* x_0“. Eine Teilmenge $U \subset M$ ist also offen, wenn sich um jeden ihrer Punkte eine offene Kugel legen lässt, die noch ganz in U enthalten ist.

Man weist leicht nach, dass die offenen Teilmengen von M eine Topologie auf M bilden, die sog. von der Metrik induzierte oder „natürliche“ Topologie $\mathfrak{O}_d$ auf dem metrischen Raum M.

Für einen metrischen Raum zeigt man leicht, dass 2 verschiedene Punkte des Raumes sich „durch offene Mengen trennen lassen“: $\forall x, y \in M, x \neq y \ \exists U(x), V(y) \in \mathfrak{O}_d : U(x) \cap V(y) = \emptyset$
Gilt diese Trennungseigenschaft auch in einem topologischen Raum, so nennen wir ihn *Hausdorff-Raum.* Ein metrischer Raum ist also ein Hausdorff-Raum.

Bemerkungen zur Konvergenz in Hausdorff-Räumen
Auf Hausdorffräume kann man den Begriffsapparat konvergenter Folgen übertragen:
Ist M ein Hausdorff-Raum, $x_0 \in M$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, so heißt die Folge *konvergent mit Grenzwert* x_0, wenn $\forall U(x_0) \in \mathfrak{O} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in U$. Für metrische Räume ist dies äquivalent zur bisherigen Definition. Die Hausdorff-Eigenschaft wird benötigt, wenn man zeigen will, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist.
In einem metrischen Raum ist es einfach, einen Punkt x_0 als Grenzwert einer Folge zu erhalten: Man kann eine Nullfolge positiver reeller Zahlen wählen $\varepsilon_n \rightarrow 0$ und als Folgenglieder irgendwelche $x_n \in U_{\varepsilon_n}(x_0)$. Um dies in einem Hausdorff-Raum nachzuahmen, brauchen wir eine *abzählbare Umgebungsbasis* jedes Punktes $x_0 \in M$, d.h. eine Familie $(U_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Umgebungen von x_0 mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n(x_0) = \{x_0\}$. Dies ist in metrischen Räumen selbstverständlich, in beliebigen Räumen jedoch nicht. Zum Studium der entsprechenden Beispiele sei das Buch „Counterexamples in Topology“ empfohlen.

Topologische Räume sind die „natürliche Umwelt“ für *stetige Abbildungen*. Mit dem Begriff der Stetigkeit möchte man erfassen, dass eine Abbildung „keine Sprünge macht“.

Definition Stetigkeit in Topologischen Räumen:
Ist $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $(M, \mathfrak{O}_M)$, $(N, \mathfrak{O}_N)$ und $x_0 \in M$, so heißt f stetig in x_0, wenn $\forall V\left(f(x_0)\right) \in \mathfrak{O}_N \ \exists U(x_0) \in \mathfrak{O}_M : f(U) \subset V$.

f heißt stetig, wenn f stetig in jedem Punkt von M ist.

Sind M,N sogar metrische Räume, so kann man sich auf offene Kugeln beschränken:

Stetigkeit in metrischen Räumen:
Ist $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (M, d_M), (N, d_N) und $x_0 \in M$, so ist f stetig in x_0, wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f\left(U_\delta(x_0)\right) \subset U_\varepsilon\left(f(x_0)\right)$. Dies kann man auch so ausdrücken: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M : d(x, x_0) < \delta \ \to \ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Satz:
Ist $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $(M, \mathfrak{O}_M)$, $(N, \mathfrak{O}_N)$, so ist f genau dann stetig, wenn $\forall V \in \mathfrak{O}_N : f^{-1}(V) \in \mathfrak{O}_M$, d.h. „Urbilder offener Mengen sind offen“.

Satz:
Ist $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (M, d_M), (N, d_N) und $x_0 \in M$, so ist f genau dann stetig in x_0, wenn für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$

Damit haben wir einen wichtigen Zusammenhang zwischen Konvergenz und Stetigkeit. Dieser letzten Satz hätte übrigens auch für Hausdorffräume mit abzählbarer Umgebungsbasis für jeden Punkt gegolten, siehe obige Bemerkungen.

Wird fortgesetzt.