Wiederholung: Tangentialraum, Vektorfeld

Ist $G\subset\mathbb{R}^n$ und $x\in G$, so identifizieren wir den Tangentialraum T_{x_0} mit einer in den Punkt *x* verschobenen Kopie des $\mathbb{R}^n$. Geometrisch denken wir uns die Vektoren in T_x mit ihrem Fußpunkt in *x* angeheftet. Für zwei Punkte $x\neq y$ sind die Tangentialräume T_x, T_y disjunkt zu denken, also $T_x\cap T_y=\emptyset$, so daß die Addition von Vektoren aus Tangentialräumen mit verschiedenen Basispunkten keinen Sinn macht.

Die vom $\mathbb{R}^n$ geerbte natürliche Basis von T_x bezeichnen wir mit $e_1(x),\dots,e_n(x)$, so daß ein beliebiger Vektor $X(x)\in T_x$ eine eindeutige Darstellung $X(x)=\sum_{i=1}^{n} X^i(x)e_i(x)$ besitzt mit Koeffizienten $X_i(x)\in\mathbb{R}$.

Man faßt nun für alle $x\in G$ die Tangentialräume T_x zum Gesamt-*Tangentialbündel* $TG=\bigcup_{x\in G} T_x$ zusammen.

Ein *Vektorfeld auf G* ist eine Abbildung $X: G\to TG$, wobei für jedes $x\in G$ gilt: $X(x)\in T_x$, d.h. für jeden Punkt $x\in G$ gibt es einen zugeordneten Vektor $X(x)$ mit Fußpunkt in *x* .

Ein Vektorfeld auf *G* läßt sich offenbar schreiben als $X=\sum_{i=1}^{n} X^i e_i$, wobei die X^i reellwertige Funktionen auf *G* sind und die e_i „Basisvektorfelder“ . Die punktweise Auswertung des Vektorfelds ergibt wieder die obige Gleichung $X(x)=\sum_{i=1}^{n} X^i(x)e_i(x)$.

Man nennt nun ein Vektorfeld auf *G* stetig, differenzierbar, etc., wenn die Koeffizientenfunktionen X_i sämtlich stetig, differenzierbar, etc. sind.

Vektorfelder auf *G* kann man in natürlicher Weise addieren und mit reellen Skalaren multiplizieren. Sie bilden selbst einen Vektorraum. Wir werden uns aus Bequemlichkeitsgründen meist nur mit dem Unterraum $\mathfrak{X}(G)$ der unendlich oft differenzierbaren Vektorfelder auf *G* beschäftigen.

Tangentialvektoren, also Vektoren in einem Tangentialraum T_x , operieren in natürlicher Weise als „Richtungsableitungen“. Sei $X(x)=\sum_{i=1}^{n} X^i(x)e_i(x)\in T_x$ gegeben, sowie eine differenzierbare Funktion *f* , die in einer Umgebung von *x* erklärt ist. Wir setzen einfach $(X(x))(f):=\sum_{i=1}^{n} X^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Damit wirkt $X(x)$ und übrigens jede Richtungsableitung als *Derivation in x* . Eine Derivation in *x* ist ein Operator, der auf einer in einer Umgebung von *x* definierten differenzierbaren Funktion mit Summen- und Produktregel operiert, wobei z.B. die Produktregel für $X(x)$ so aussieht: $(X(x))(fg)=(f(x))\big((X(x))(g)\big)+(g(x))\big((X(x))(f)\big)$.

Damit können wir einem Vektorfeld $X\in\mathfrak{X}(G)$ und einer differenzierbaren Funktion *f* auf *G* eine neue differenzierbare Funktion *Xf* zuordnen nach der Vorschrift $(Xf)(x):=(X(x))(f)$. Die Produktregel nimmt jetzt die besonders einfache Gestalt $X(fg)=f\cdot Xg+Xf\cdot g$ an. Bezeichnet man die Menge der auf *G* (unendlich oft) differenzierbaren Funktion mit $\mathcal{E}(G)$, so wirkt ein

Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ als *Derivation* auf $\mathcal{E}(G)$, d.h. nach der Summenregel $X(\lambda f + \mu g) = \lambda Xf + \mu Xg$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und obiger Produktregel $X(fg) = f \cdot Xg + Xf \cdot g$.

Man kann nun auch umgekehrt zeigen, daß jede Derivation in einem Punkt *x* einem Vektor in T_x und jede Derivation auf *G* einem Vektorfeld in $\mathfrak{X}(G)$ entspricht, d.h. man unterscheidet überhaupt nicht mehr zwischen Vektorfeldern und Derivationen.

Daher schreibt man ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ häufig nicht in der Form $X = \sum_{i=1}^{n} X^i e_i$, sondern als $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, und denkt sich die Beziehungen

Richtungsvektor in *x* = Derivation in *x* bzw.
Vektorfeld auf *G* = Derivation auf *G*

implizit mit.

In der Physik bezeichnet man eine Funktion in $\mathcal{E}(G)$ häufig auch als (reelles) *Skalarfeld* auf *G* , ein Vektorfeld bleibt ein Vektorfeld.

Die obigen Begriffe und Definitionen kann man nun leicht von einem Gebiet auf Gebiete erweitern, die in *k*-dimensionalen glatten Flächen im $\mathbb{R}^n$ bzw. in *n*-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten liegen. Die Zusatzaufgabe besteht in diesen Fällen natürlich darin, die Vektorfelder bezüglich der dann wechselnden Koordinaten und damit auch der wechselnden Basen für Tangentialräume und Derivationen auszudrücken.

Kotangentialraum, Kovektorfelder, 1-Formen

Oben haben wir den Tangentialraum T_x , $x \in G$ definiert.
Entsprechend definieren wir den Kotangentialraum $T_x^* := \{\varphi \mid \varphi : T_x \to \mathbb{R} \text{ linear}\}$ als den Dualraum von T_x . Eine Basis dieses Raumes sind $e^1(x) = (1,0,\ldots,0), \ldots, e^n(x) = (0,\ldots,0,1)$. Wie vorher faßt man die Kotangentialräume T_x^* zum *Kotangentialbündel* $T^*G = \bigcup_{x \in G} T_x^*$ zusammen und definiert ein *Kovektorfeld* bzw. eine *1-Form* als Abbildung $\omega : G \to T^*G$ mit $\omega(x) \in T_x^*$. Eine solche Abbildung läßt sich analog zur obigen Vektorfeldsituation in der Basisdarstellung $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i$ schreiben und nennt ω stetig, differenzierbar, etc. wenn sämtliche Koeffizientenfunktionen ω_i dies sind. Den Raum der (unendlich oft) differenzierbaren Kovektorfelder auf *G* bezeichnet man auch mit $\mathcal{E}^1(G)$.

Ein Kovektor $\omega(x) \in T_x^*$ ist ja definitionsgemäß eine reellwertige Funktion auf T_x , wir können ihn also auf einen Vektor $X(x) \in T_x$ anwenden und erhalten als Wert eine Zahl $(\omega(x))(X(x))$.
Sind nun ein Kovektorfeld $\omega \in \mathcal{E}^1(G)$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ gegeben, so setzen wir $<\omega, X>(x) := (\omega(X))(x) := (\omega(x))(X(x))$ und erhalten eine differenzierbare Funktion $<\omega, X> = \omega(X) \in \mathcal{E}(G)$. Diese Operation, die aus einem Kovektorfeld und einem Vektorfeld eine Funktion macht, nennt man auch *inneres Produkt* oder auch *Kontraktion* .

Demgegenüber haben wir früher das *äußere Produkt* kennengelernt, welches aus zwei 1-Formen

$\omega, \eta \in \mathcal{E}^1(G)$ die 2-Form $\omega \wedge \eta \in \mathcal{E}^2(G)$ und allgemeiner aus einer *k*-Form $\omega \in \mathcal{E}^k(G)$ und einer *l*-Form $\eta \in \mathcal{E}^l(G)$ eine (*k*+*l*)-Form $\omega \wedge \eta \in \mathcal{E}^{k+l}(G)$ machte.

Ist $f \in \mathcal{E}(G)$ eine differenzierbare Funktion, so bilden wir in einem Punkt $x \in G$ die Ableitungsmatrix $\mathrm{d}\, f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\right) \in T_x^*$. Da für die Koordinatenfunktionen x^i offenbar gilt $\mathrm{d}\, x^i(x) = e^i(x)$. Wir können daher schreiben

$$\mathrm{d}\, f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\, \mathrm{d}\, x^i(x) \quad \text{bzw.}$$

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}\, x^i$$

und schreiben auch eine allgemeine 1-Form statt in der Basisdarstellung $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i$ in der äquivalenten Darstellung $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}\, x^i$.

Der Ableitungsoperator d macht also aus einer Funktion in $\mathcal{E}(G)$ eine 1-Form in $\mathcal{E}^1(G)$. Manchmal schreibt man auch $\mathcal{E}^0(G)$ statt $\mathcal{E}(G)$. Damit haben wir die Ableitung als Funktion $\mathrm{d} : \mathcal{E}^0(G) \to \mathcal{E}^1(G)$.

Für eine *k*-Form $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}\, x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\, x^{i_k} \in \mathcal{E}^k(G)$ hatten wir definiert $\mathrm{d}\, \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathrm{d}\, \omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}\, x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\, x^{i_k} \in \mathcal{E}^{k+1}(G)$ und den Ableitungsoperator $\mathrm{d} : \mathcal{E}^k(G) \to \mathcal{E}^{k+1}(G)$ auch *äußere Ableitung* genannt. Wendet man den Operator d zweimal an, so folgte aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen $\mathrm{d}(\mathrm{d}\, \omega) = 0$.

Die Abbildungskette $\mathcal{E}^0(G) \to \mathcal{E}^1(G) \to \ldots \to \mathcal{E}^n(G)$ mit den Abbildungen d nennt man auch den *de-Rham-Komplex auf G* .

Mit Hilfe der äußeren Ableitung wird der allgemeine ***Stokesschen Satz*** formuliert.

Lie Ableitung

Sind zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ und eine Funktion $f \in \mathcal{E}(G)$ gegeben, so bilden wir den *Kommutator* $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$ durch mehrfaches Ableiten in Richtung von *X* und *Y*. A priori könnte man denken, daß dabei zweite Ableitungen von *f* auftreten, die folgende Rechnung zeigt aber, daß dies nicht der Fall ist:

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) = X\left(\sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - Y\left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \quad \text{(Produktregel!)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X(Y^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}+Y^i\left(X(\frac{\partial f}{\partial x^i})\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(Y(X^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}+X^i\left(Y(\frac{\partial f}{\partial x^i})\right)\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}X^j(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j})\frac{\partial f}{\partial x^i}+Y^i\left(X^j(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i})\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}Y^j(\frac{\partial X^i}{\partial x^j})\frac{\partial f}{\partial x^i}+X^i\left(Y^j(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i})\right)\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}+\sum_{i,j=1}^{n}Y^iX^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\sum_{i,j=1}^{n}X^iY^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Es ist also ein neues Vektorfeld entstanden: $[X,Y]=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$

Man nennt $[X,Y]$ *Lie-Ableitung* von Y nach X und schreibt auch $L_X Y := L_X(Y)=[X,Y]$.
Offenbar gelten für $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(G),\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln:

$[X,Y]=-[Y,X]$
$[X,\lambda Y+\mu Z]=\lambda[X,Y]+\mu[X,Z]$
$[X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$

Letztere Regel kann man offenbar auch in der Form $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ schreiben, was manche Leute schöner finden. In der ersten Form bleibt aber der Produktregel-charakter $L_X[Y,Z]=[L_X Y,Z]+[Y,L_X Z]$ sichtbar, und die Formel wirkt "natürlicher".

Mit dem Produkt [X,Y] und obigen Rechenregeln ist der Raum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(G)$ eine sogenannte Lie-Algebra.

Beispiele für Lie-Algebren sind auch der Raum der nxn-Matrizen mit dem Kommutatorprodukt $[A,B]=AB-BA$ oder auch der Raum der antisymmetrischen nxn-Matrizen ($A^t=-A$), ebenfalls mit dem Kommutatorprodukt.

Interpretation der Lie-Ableitung $[X,Y]$

Läuft man von einem Punkt $x_0\in G$ die Paramterdistanz ε in Richtung des Vektorfeldes X, dann weiter in Richtung Y, so sei $z_1(\epsilon)$ der Punkt, den wir dabei erreichen. Anschließend bewegen wir uns umgekehrt zuerst in Richtung Y, dann in Richtung X, und erreichen den Punkt $z_0(\epsilon)$. Im allgemeinen ist $z_1\neq z_0$, und wir wollen jetzt zeigen, daß $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{z_1(\epsilon)-z_0(\epsilon)}{\epsilon^2}=[X,Y]$:

$$z_1(\epsilon)=x_0+\epsilon X(x_0)+\epsilon Y\left(x_0+\epsilon X(x_0)\right)\qquad z_0(\epsilon)=x_0+\epsilon Y(x_0)+\epsilon X\left(x_0+\epsilon Y(x_0)\right)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{z_1(\epsilon)-z_0(\epsilon)}{\epsilon^2}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{Y\left(x_0+\epsilon X(x_0)\right)-Y(x_0)}{\epsilon}-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{X\left(x_0+\epsilon Y(x_0)\right)-X(x_0)}{\epsilon}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\frac{Y^i\left(x_0+\epsilon X(x_0)\right)-Y^i(x_0)}{\epsilon}-\lim_{\epsilon\to 0}\frac{X^i\left(x_0+\epsilon Y(x_0)\right)-X^i(x_0)}{\epsilon}\right)e_i(x_0)= \quad .$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X(Y^i)\right)(x_0)-\left(Y(X^i)\right)(x_0)\right)e_i(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right)(x_0)-\left(\sum_{j=1}^{n}Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)(x_0)\right)e_i(x_0)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right)(x_0)-\left(Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)(x_0)\right)e_i(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)(x_0)\right)e_i(x_0) \quad ,$$

was offenbar gleich der Koordinatendarstellung ist, die wir oben für $[X,Y](x_0)$ ausgerechnet haben.

Gilt $[X,Y]=0$, d.h. auch daß in obiger geometrischer Konstruktion keine Lücke bleibt, so sagt man, daß die beiden Vektorfelder *kommutieren* .

Offenbar gilt für die Koordinatenvektorfelder e_i bzw. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in Differentialoperatorschreibweise, daß sie paarweise kommutieren, was sowohl geometrisch wie rechnerisch klar ist.

Pullback und Pushout

Seien $G\subset\mathbb{R}^n$ und $H\subset\mathbb{R}^m$ Gebiete, $\varphi: G\rightarrow H$ eine differenzierbare Abbildung.
Kann man Objekte, die in *H* leben, mittels φ zu Objekten auf *G* machen, so spricht man von *Pullback* ; geht der Transport in die umgekehrte Richtung, so spricht man von *Pushout* .

Ist z.B. $f\in\mathcal{E}(H)$ so setzen wir $\varphi^*(f):=f\circ\varphi$ und haben somit eine Pullbackabbildung $\varphi^*:\mathcal{E}(H)\rightarrow\mathcal{E}(G)$. Ähnlich definierten wir den Pullback von Differentialformen, z.B. für eine 1-Form $\omega\in\mathcal{E}^1(H)$, $\omega=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\,\mathrm{d}\,y^i$ wurde gesetzt $\varphi^*(\omega):=\sum_{i=1}^{m}\varphi^*(\omega_i)\,\mathrm{d}\left(\varphi^*(y^i)\right)=$ $\sum_{i=1}^{m}(\omega_i\circ\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi^i \;\in\; \mathcal{E}^1(G)$.

Tangentialvektoren dagegen kann man nur "vorwärts" transformieren, und zwar so: Ist $x_0\in G$, $X(x_0)=\sum_{i=1}^{n}X^i(x_0)\frac{\partial}{\partial x^i}(x_0) \;\in\; T_{x_0}$, $y_0=\varphi(x_0)\in H$, so definieren wir $Y(y_0):=\varphi_*(x_0)\big(X(x_0)\big)\in T_{y_0}$, indem wir für ein beliebiges $f\in\mathcal{E}(H)$ setzen: $\big(Y(y_0)\big)(f):=\big(X(x_0)\big)(f\circ\phi)$. Diesen Ausdruck können wir jetzt weiter ausrechnen, indem wir u.a. die Kettenregel anwenden: $\ldots=\sum_{i=1}^{n}X^i(x_0)\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x^i}(x_0) \;=$

$$\sum_{i=1}^{n}X^i(x_0)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y^j}(y_0)\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\,X^i(x_0)\right)\frac{\partial f}{\partial y^j}(y_0)=$$
$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\,X^i(x_0)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}(y_0)\right)(f) \quad .$$

Somit haben wir die Gleichung $Y(y_0):=\varphi_*(x_0)\big(X(x_0)\big)=\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}(x_0)\,X^i(x_0)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}(y_0)\right)$,
d.h. der Spaltenvektor der Komponenten von $Y(y_0)$ ergibt sich durch Anwendung der Jacobi Matrix von φ auf den Spaltenvektor der Komponenten von $X(x_0)$. Diese Rechnung war nötig, denn so können wir die lineare Abbildung $\varphi_*(x_0):\; T_{x_0}\rightarrow T_{y_0}$ konkret ausrechnen.

Wir brauchten oben die Koordinatendarstellung einer 1-Form, um deren Pullback zu definieren. Mit Hilfe des Pushout erhalten wir aber die folgende koordinatenfreie Formel:

Ist $\omega \in \mathcal{E}^1(H)$, $X \in \mathfrak{X}(G)$ so gilt $<\varphi^* \omega , X > (x_0) = \omega(y_0)\big(\varphi_*(x_0)\big(X(x_0)\big)\big)$.
(Man erinnere sich, daß $\omega(y_0) \in T^*_{y_0}$, also als reellwertige lineare Abbildung auf T_{y_0} wirkt, und es ist ja tatsächlich $\varphi_*(x_0)\big(X_{(x_0)}\big) \in T_{y_0}$.

Wir können via Pushout zwar einzelne Tangentialvektoren, aber nicht unbedingt ein Vektorfeld von G nach H transportieren: Ist nämlich die Transformationsabbildung φ nicht injektiv, hätten wir einem Punkt mit zwei Urbildern zwei verschiedene Vektoren zuzuordnen. Andererseits funktioniert der Pullback von Funktionen oder Differentialformen immer, egal ob die Transformationsabbildung injektiv ist oder nicht.

Ist andererseits φ ein *Diffeomorphismus* d.h. bijektiv mit differenzierbarer Umkehrabbildung, so transportiert der Pushout Vektorfelder von G nach H ; wir erhalten eine natürliche Abbildung $\varphi_*: \ \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(H)$, indem wir die Vektoren des Ausgangsvektorfelds punktweise "pushen". Dies werden wir später insbesondere bei Lie-Gruppen anwenden.

Lie-Gruppen

Eine Lie-Gruppe G ist definitionsgemäß gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und eine Gruppe. Wie immer, wenn ein Objekt verschiedene Strukturen trägt, gibt es diesbezügliche Verträglicheitsbedingungen. Für Lie-Gruppen fordert man, daß die Gruppenoperation $G \times G \to G, (x,y) \to xy^{-1}$ differenzierbar sei. (Damit wird gleichzeitig gesagt, daß die Gruppenmultiplikation und die Inversenbildung differenzierbar sind.)

Reelle Matrix-Gruppen

Wir werden im folgenden nur solche Lie-Gruppen betrachten, die Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sind, also der Gruppen der invertierbaren reell- bzw. komplexwertigen nxn-Matrizen. Konzentrieren wir uns zunächst auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Diese Gruppe ist eine offene Teilmenge des n^2 - dimensionalen Vektorraums $M_n(\mathbb{R})$ aller nxn-Matrizen, da offenbar $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | \det(X) \neq 0\}$. Die Determinante ist als Abbildung $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ differenzierbar und damit stetig und ein Gruppenhomomorphismus. Der Kern dieses Homomorphismus besteht aus den Matrizen mit Determinante 1 und erhält im folgenden den Namen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zerfällt in die offene Untergruppe $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ der Matrizen mit positiver Determinante und die gleichgroße offene Menge der Matrizen mit negativer Determinante. Im Falle n=1 sieht man dies sofort, denn die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ zerfällt in die offene Untergruppe der positiven reellen Zahlen und die offene Menge der negativen reellen Zahlen, die aber keine Untergruppe bilden. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist also nicht zusammenhängend. Da die Matrizenmultiplikation und die Inversenbildung[1] polynomiale Abbildungen sind, ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ offenbar eine Lie-Gruppe.

Die Konzentration auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und ihre Untergruppen statt auf allgemeine Lie-Gruppen

---

1Ist $X = (x^{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so sei X_{ij} die Determinante der (n-1)x(n-1) Matrix, die entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht. Setzt man $x_{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij}$, so ist (x_{ij}) die zu (x^{ij}) inverse Matrix. Da diese Determinanten polynomiale Abbildungen sind, ist insbesondere die Inversenbildung differenzierbar.

vereinfacht die Analyse insofern, als wir meist keinen Atlas auf diesen Mannigfaltigkeiten konstruieren müssen, sondern mit den durch die Obermenge $M_n(\mathbb{R})$ gegebenen globalen Koordinaten x^{ij} arbeiten und damit auf Mannigfaltigkeitstheorie weitgehend verzichten können. Einige wichtige Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sind

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})|\det(X)=1\}$, die sog. *spezielle lineare Gruppe*
$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})|X^t X=E\}$, die sog. *orthogonale Gruppe*
$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})|X^t X=E,\det(X)=1\}$, die sog. *spezielle orthogonale Gruppe*

Die Spalten der Matrizen in $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ bilden also ein Orthonormalsystem bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^n$, in $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sogar ein orientiertes Orthonormalsystem. Geometrisch handelt es sich bei $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ um Drehungen um den Nullpunkt, während bei $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})|X^t X=E\}$ noch Klappungen um eine Ebene durch den Nullpunkt und ihre Kombination mit Drehungen hinzukommen.

Die orthogonale Gruppe kann man auch auffassen als die Gruppe derjenigen Matrizen, die das natürliche Skalarprodukt < , > auf dem $\mathbb{R}^n$ invariant lassen, also:
$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})|\forall x,y\in\mathbb{R}^n:\ <Ax,Ay>=<x,y>\}$

Entsprechend kann man bezüglich anderer bilinearer Produkte die Gruppen derjenigen Matrizen definieren, die diese Produkte invariant lassen. Physikalisch wichtig ist folgendes Produkt auf dem $\mathbb{R}^4$: $(x,y)\to -x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, das sogenannte *Minkowski-Produkt*. Den $\mathbb{R}^4$, ausgestattet mit diesem Produkt, nennt man auch *Minkowski-Raum* . Das Minkowski-Produkt kann man auch als Matrizenprodukt $(x_0\,x_1\,x_2\,x_3)\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ schreiben, mit der Bezeichnung $S=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ drücken wir das Minkowski-Produkt aus als $x^t S\, y$. Die Gruppe derjenigen Matrizen, die das Minkowski-Produkt invariant lassen, heißt *Lorentz-Gruppe* oder auch $\mathrm{O}(3{,}1,\mathbb{R})$ und man kann auch schreiben
$\mathrm{O}(3{,}1,\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})|X^t S\,X=E\}$. Analog zu den obigen Bezeichnungen setzt man $\mathrm{SO}(3{,}1,\mathbb{R})=\{X\in\mathrm{O}(3{,}1,\mathbb{R})|\det(X)=1\}$ und nennt diese die *spezielle Lorentz-Gruppe.*

Weitere physikalisch wichtige Beispiele sind die Spin-Gruppen und die symplektischen Gruppen. Informieren Sie sich hier ggf. eigenständig.

Alle oben genannten Gruppen sind abgeschlossene Teilmengen von $M_n(\mathbb{R})$. Sie sind glatte Flächen in diesem Raum und damit differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Die Glattheit von $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ war Thema in Übungsblatt 2.

Ein wichtiger Unterschied zwischen Gruppen wie den SL und den SO ist noch, daß die Zahlen in den ersteren beliebig groß werden können, währen sie in SO offenbar sämtlich kleinergleich 1 und somit beschränkt sind.

Komplexe Matrixgruppen

Im Prinzip läßt sich eine komplexe nxn Matrix als reelle (2n)x(2n)-Matrix auffassen, indem man die Isomorphie $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ zu Grunde legt und in einer komplexen Matrix einen komplexen Eintrag $z = x + iy$ ersetzt durch einen Block der Form $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ Trotzdem ist es meist natürlicher, die komplexe Notation beizubehalten.

Als Lie-Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ erwähnen wir $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, analog definiert wie im reellen Fall, sowie $\mathrm{U}(n) = \{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | U^* U = E\}$, die *unitäre Gruppe* .
Dabei ist "*" die Operation "Konjugation und Transposition". Unitäre Matrizen lassen das übliche hermitische Produkt auf dem $\mathbb{C}^n$ invariant. Die Spalten einer unitären Matrix bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des hermitischen Produkts. Die Determinante einer unitären Matrix ist eine komplexe Zahl vom Betrag 1, während die Determinante einer ortogonalen Matrix eine reelle Zahl vom Betrag 1 ist, was nur die Möglichkeit ± 1 läßt. Schließlich enthält die *spezielle unitäre Gruppe* $\mathrm{SU}(n)$ definitionsgemäß die unitären Matrizen mit Determinante 1.

Transformationsgruppen

Die Matrizen der oben erwähnten Liegruppen wirken bzw. "operieren" als lineare Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

Allgemein erklärt man eine Operation einer Gruppe *G* auf einer Menge *M* als Abbildung $G \times M \to M$, $(g, x) \to gx$ mit $\forall x \in M: \; ex = x$ und $\forall x \in M \;\; \forall g, h \in G: \; (gh) x = g(hx)$ und nennt *G* eine Transformationsgruppe auf *M* .

Zu jedem Gruppenelement *g* gehört also die durch $x \to gx$ gegebene bijektive Abbildung $M \to M$. Trägt *M* eine spezielle Struktur, so wird man häufig an solchen Gruppenoperationen interessiert sein, bei denen diese Abbildungen dieStruktur auf *M* erhalten. Ist also *M* ein topologischer Raum, so wünscht man sich Homöomorphismen sein, bei einem Vektorraum Isomorphismen, etc.

Im $\mathbb{R}^n$ interessiert man sich aber nicht nur für lineare Abbildungen, also z.B. Drehungen, sondern auch für Translationen, also Verschiebungen. Die Gruppe der *euklidischen Transformationen* im $\mathbb{R}^n$ besteht aus den bijektiven Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welche Längen und Winkel von Objekten invariant lassen, d.h. die Objekte auf kongruente Objekte abbilden. Diese Transformationen bilden die sog. *Euklidische Gruppe*. Eine euklidische Transformation erhält man als Hintereinanderausführung einer Rotation und einer Translation. Wir setzen daher $G = \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ und definieren die Wirkung eines Elements $(A, v) \in G$ auf den Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ durch $Ax + v$ und daran orientiert die Verknüpfung zweier Elemente $(B, w), (A, v) \in G$ als $(B, w) \circ (A, v) := (BA, Bv + w)$.
Offenbar wird *G* damit zu einer Gruppe mit neutralem Element $(E, 0)$. Mit der Operation $((A, v), x) \to Ax + v$ ist die euklidische Gruppe eine Transformationsgruppe auf $\mathbb{R}^n$ und offenbar auch eine Lie-Gruppe.