Mathematik III und IV für Physiker und Elektrotechniker

Vordiplomklausur, 14.7.2005, 14:30-18:30 Uhr, Hörsaal HS 1010

M. Hortmann

Name **Matrikelnummer**

Studiengang **Tutor**

1a	b	2	3a	b	4	5a	b	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ

---

1. Betrachten Sie die Polynome $f_1(x)=x+1, f_2(x)=x^2$ als Elemente des Vektorraums C[0,1] der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall [0,1] .

a) Zeigen Sie, daß f_1, f_2 linear unabhängig sind.

b) Auf C[0,1] ist durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ ein Skalarprodukt definiert. Finden sie zwei orthonormale Funktionen g_1, g_2 , die denselben Teilraum von C[0,1] aufspannen wie f_1, f_2 , d.h. wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf f_1, f_2 an.

2. Sei $\boldsymbol{A}$ eine σ - Algebra auf der Menge X und μ ein Maß auf $\boldsymbol{A}$ und $U \in \boldsymbol{A}$.
Setzen Sie für $V \in \boldsymbol{A}$: $\nu(V)=\mu(U \cap V)$.
Begründen Sie, daß ν ein Maß auf $\boldsymbol{A}$ ist .

3 a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_n,\ n \in \mathbb{Z}$ der Funktion $f(x)=\sin(2x)$.
3 b) Gegeben seien die Werte $a_0=1, a_1=2, a_2=3, a_3=5, a_4=1$. Berechnen Sie den Koeffizienten b_3 der diskreten Fouriertransformation von a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 .

4. Sei R der durch die Kreise $x^2+y^2=4$ und $x^2+y^2=9$ berandete Kreisring im $\mathbb{R}^2$.
Berechnen Sie mittels Transformation auf Polarkoordinaten das Integral $\int_R \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. Berechnen Sie für die im $\mathbb{R}^3$ gegebene 2-Form $\omega=(x+y+z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$
a) die 3 Form $\mathrm{d}\omega$ und
b)für die durch $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \phi(u,v)=(v, u^2+v^2, u+v)$ parametrisierte Fläche den Pullback $\phi^* \omega$.

6. Betrachten Sie den Paraboloiden $P=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; y=x^2+z^2,\, y\leqslant 1\right\}$, sowie die 1-Form $\alpha=z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$ und die 2-Form $\omega=\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$.
Benutzen Sie die Stokessche Integralformel, um das Integral $\int_P \omega$ auszurechnen.

7. Man berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z)=1+2z^2+z^3$ im Punkt $z_0=2-i$.

8. Man berechne (z.B. mit Hilfe des Residuensatzes) das Integral $\int_\gamma \left(\frac{1}{(z+i)^3}+\frac{1}{z-5}+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z$,
wobei der Weg γ den Kreis mit Radius 2 um den Nullpunkt beschreibt, der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

9. Man berechne das Lie-Produkt $[X,Y]$ für die Vektorfelder $X=xy\frac{\partial}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial}{\partial y}$ und $Y=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$ im $\mathbb{R}^2$.

10. Man zeige, daß die nxn-Matrizen mit Spur Null (d.h. die Summe der Hauptdiagonalelemente ist Null) eine Lie-Algebra bilden.

11. Zeigen Sie $\det\exp(A)=\exp\operatorname{Spur}(A)$ für eine reelle 2x2 Matrix der Form $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$.

12. Sei $A(t), t\in\mathbb{R}$ eine differenzierbare Kurve in der Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ mit $A(0)=E$.
Zeigen Sie, daß $A'(0)$ die Spur Null besitzt.

13. Die lineare Abbildung $S:\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $S(x\otimes y)=\frac{1}{2}(x\otimes y+y\otimes x)$.
Man finde eine Basis des Kerns von S und beweise die Basiseigenschaften.

14. Man drücke die Riemannsche Metrik $\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$ auf der Halbkugel $S^+=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1=x^2+y^2+z^2,\, z>1\right\}$ bezüglich der in der x,y-Ebene gegebenen Polarkoordinaten r,φ aus, so daß sich ein Ausdruck ergibt, der nur $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\varphi$ enthält.

15. $g=(1+x^2+y^2)(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)$ ist eine Riemannsche Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie für eine differenzierbare Funktion $f(x,y)$ den Laplace-Operator $*\mathrm{d}*\mathrm{d}f$.
(Erinnerung:
Dazu müssen Sie zunächst zwei 1-Formen α_1,α_2 finden, die bezüglich der Metrik ein orientiertes Orthonormalsystem bilden und dann ausnutzen, daß $*\alpha_1=\alpha_2$, $*\alpha_2=-\alpha_1$, $*(\alpha_1\wedge\alpha_2)=1$.)