

Übungsklausur zum Stoff des ersten Semesters (erster Teil) Lösungen

1. Im \mathbb{R}^3 seien die Vektorfelder $X = (z+y)\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$ gegeben.
Man berechne $[X, Y]$

Allgemein haben wir für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$: $[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$.

In unserem Fall sind die meisten Terme 0, und es ergibt sich $[X, Y] = -x \frac{\partial}{\partial y}$.

2. Im \mathbb{R}^2 betrachte man die symmetrische Bilinearform $g(x, y) = x^1 y^1 - x^2 y^2$ und die Lie-Gruppe derjenigen 2x2-Matrizen, für die gilt: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = g(Ax, Ay)$.

Wie sieht die zugehörige Lie-Algebra aus?

Nennen wir diese Matrizengruppe G . Es ist $G \subset GL(2, \mathbb{R}) \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Für $A \in G$ seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$, $a_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2$, $a_2 = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2$ die beiden Spalten von A , also $Ae_1 = a_1$, $Ae_2 = a_2$, so daß nach Voraussetzung $1 = g(e_1, e_1) = g(a_1, a_1) = (a_1^1)^2 - (a_1^2)^2$,
 $0 = g(e_1, e_2) = g(a_1, a_2) = a_1^1 a_2^1 - a_1^2 a_2^2$, $-1 = g(e_2, e_2) = g(a_2, a_2) = (a_2^1)^2 - (a_2^2)^2$.

Die zugehörige Lie-Algebra ist definitionsgemäß gleich $T_E(G) \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R}^2)$, also der Vektorraum derjenigen Matrizen, die sich ergeben, wenn man die Ableitung $c'(0)$ berechnet von differenzierbaren Kurven $c: I \rightarrow G$ mit $c(0) = E$.

Sei also eine solche Kurve gegeben und $c(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & a_2^1(t) \\ a_1^2(t) & a_2^2(t) \end{pmatrix}$. Nach obiger Rechnung ist

$f(t) = (a_1^1(t))^2 - (a_1^2(t))^2$ konstant, also $0 = f'(t) = 2a_1^1'(t)a_1^1(t) - 2a_1^2'(t)a_1^2(t)$. Setzt man jetzt $t=0$, so ergibt sich $a_1^1'(0) = 0$, da ja $a_1^1(0) = 1, a_1^2(0) = 0$.

Auf dieselbe Weise folgt aus der Konstanz von $h(t) = a_1^1(t)a_2^1(t) - a_1^2(t)a_2^2(t)$, daß

$0 = h'(t) = a_1^1'(t)a_2^1(t) + a_2^1'(t)a_1^1(t) - a_1^2'(t)a_2^2(t) - a_2^2'(t)a_1^2(t)$, und mit $t=0$ ergibt sich diesmal $a_2^1'(0) = a_1^2'(0)$.

Schließlich führt die dritte Gleichung zu $a_2^2'(0) = 0$, so daß sich insgesamt ergibt

$c'(0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Die gesuchte Lie-Algebra ist also $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Sei A eine antisymmetrische 3x3-Matrix. Begründen Sie, warum $\exp(A) \in SO(3, \mathbb{R})$.

Wir wissen, daß $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, wenn A, B kommutieren, wenn also $AB = BA$. Antisymmetrie von A bedeutet $0 = A + A'$, wobei A' die zu A transponierte Matrix ist. Daher folgt jetzt $A(A') = A(-A) = -AA = (-A)A = (A')A$, d.h. A, A' kommutieren, und daher folgt

$$E = \exp(0) = \exp(A' + A) = \exp(A') \exp(A) = \exp(A)' \exp(A) .$$

Die letzte der obigen Gleichungen ist richtig, weil man offenbar das Transponieren in die Exponentialreihe hineinziehen kann. Setzt man $U = \exp(A)$, so bedeutet die Gleichung $U' U = E$, daß die Spalten von U ein Orthonormalsystem bilden. Damit ist auch

$1 = \det E = \det U' \det U = (\det U)^2$, so daß $\det U = \pm 1$. Wir wissen jetzt schon, daß $U \in O(3)$, aber damit $U \in SO(3)$, brauchen wir noch $\det U = 1$.

Dazu betrachten wir die auf ganz \mathbb{R} definierte stetige Funktion $f(t) = \det(\exp(tA))$. Offenbar ist $f(0) = 1$, und wir müssen zeigen, daß $f(1) = 1$. Da mit A auch tA antisymmetrisch ist, folgt aus obigen Rechnungen, daß $f(t) = \pm 1$. Da aber eine stetige Funktion, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist, nicht zwischen verschiedenen Werten springen kann, muß auch $f(1) = 1$ gelten, also $\det U = \det \exp(A) = 1$.

4. Ist $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, so ist durch $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine bijektive holomorphe

Abbildung der oberen Halbebene $H \subset \mathbb{C}$ in sich gegeben. Beschreiben Sie zu jedem $z_0 \in H$ die Untergruppe $\text{Fix}_{z_0} \subset SL(2, \mathbb{R})$ derjenigen Matrizen A , für die gilt $\varphi_A(z_0) = z_0$.

Man bestimmt am einfachsten zunächst die Fixgruppe in einem speziellen Punkt, z.B. in i . Da man durch geeignete Transformationen φ_A diesen Punkt in jeden anderen transformieren kann, hat man dann auch sofort die anderen Fixgruppen. Also

Wenn $\varphi_A(i) = i$, so folgt aus $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, daß $ai+b = di-c$, also $a=d$ und $b=-c$, so daß

$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $\det A = a^2 + c^2 = 1$. Da man sofort nachrechnet, daß auch umgekehrt für eine

Matrix A von dieser Form $\varphi_A(i) = i$ haben wir $\text{Fix}_i = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}, a^2 + c^2 = 1 \right\} = SO(2, \mathbb{R})$

Als nächstes muß zu einem "beliebigen aber festen" $z_0 \in H$ eine Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$

gefunden werden mit $\varphi_B(i) = z_0$. Sei $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$. Die Forderung $\varphi_B(i) = z_0$

bedeutet $\frac{ai+b}{ci+d} = x_0 + iy_0$, also $ai+b = (ci+d)(x_0 + iy_0) = (-cy_0 + dx_0) + i(cx_0 + dy_0)$, woraus

man $b = -cy_0 + dx_0$ und $a = cx_0 + dy_0$ ableitet. Dies sind zwei lineare Gleichungen und die nicht-lineare Gleichung $ad - bc = 1$ für die 4 Unbestimmten a, b, c, d . Setzen wir also $c = 0$, so ergibt

sich $b = dx_0$ und $a = dy_0$ und $ad = 1$ damit $y_0 = a^2$, $a = \sqrt{y_0}$, $d = \frac{1}{\sqrt{y_0}}$, $b = \frac{x_0}{\sqrt{y_0}}$ und

schließlich $B = \begin{pmatrix} \sqrt{y_0} & \frac{x_0}{\sqrt{y_0}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_0}} \end{pmatrix}$. Jetzt macht man noch die Probe, daß tatsächlich $\varphi_B(i) = z_0$.

Dann ist auch $B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{y_0} & -\frac{x_0}{\sqrt{y_0}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_0}} \end{pmatrix}$ und $\varphi_{B^{-1}}(z_0) = (\varphi_B)^{-1}(z_0) = i$.

Ist jetzt $A \in \text{Fix}_{z_0}$, also $\varphi_A(z_0) = z_0$, und setzt man $C = BAB^{-1}$, so ist

$\varphi_C(i) = \varphi_B \circ \varphi_A \circ \varphi_B^{-1}(i) = \varphi_B(\varphi_A(\varphi_B^{-1}(i))) = \varphi_B(\varphi_A(z_0)) = \varphi_B(z_0) = i$, so daß $C \in \text{Fix}_i$. Also hat unser $A \in \text{Fix}_{z_0}$ die Form $A = B^{-1}CB$ mit $C \in \text{Fix}_i$. Auch umgekehrt zeigt man sofort, daß mit $C \in \text{Fix}_0$ für die Matrix $A = B^{-1}CB$ gilt: $A \in \text{Fix}_{z_0}$, so daß wir insgesamt gezeigt haben:

$$\text{Fix}_{z_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{y_0} & -\frac{x_0}{\sqrt{y_0}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y_0} & \frac{x_0}{\sqrt{y_0}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_0}} \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -cx_0 + a & \frac{-c(x_0^2 + 1)}{y_0} \\ cy_0 & cx_0 + a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

(Den zuletzt ausgerechneten Matrizen sieht man nicht direkt an, daß sie eine Gruppe bilden!)

(Dahinter steckt ein allgemeineres gruppentheoretisches Prinzip: Ist G eine Gruppe und $B \in G$, so ist durch $\Phi_B(A) = BAB^{-1}$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus $\Phi_B: G \rightarrow G$ gegeben. Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch ‘‘Automorphismus’’ und ein Automorphismus der obigen Form heißt ‘‘innerer Automorphismus’’. Eine Untergruppe $U \subset G$ wird durch einen solchen Automorphismus auf eine ‘‘konjugierte Untergruppe’’ $U' = \Phi(U)$ abgebildet. In diesem Sinne haben wir oben die Gruppe Fix_{z_0} als konjugierte Untergruppe von Fix_i erhalten.)

5. Sei $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz endlich-dimensionaler K -Vektorräume. Warum ist $\dim U - \dim V + \dim W = 0$?

Nennen wir die Abbildungen in der Sequenz i und π . Sei $U' = i(U)$. Wir nehmen uns eine Basis u_1, \dots, u_k von U . Weil i injektiv ist, sind die Bilder $v_1 = i(u_1), \dots, v_k = i(u_k) \in V$ linear unabhängig. Wir ergänzen diese Menge zu einer Basis $v_1, \dots, v_n \in V$. Jetzt betrachten wir die Bilder $w_{k+1} = \pi(v_{k+1}), \dots, w_n = \pi(v_n) \in W$ und zeigen, daß es sich um eine Basis handelt. Danach wissen wir $\dim U = k$, $\dim V = n$, $\dim W = n - k$ und sind fertig:

Erst die lineare Unabhängigkeit:

Nehmen wir an $0 = \sum_{i=k+1}^n \lambda^i w_i$. Wir rechnen $0 = \sum_{i=k+1}^n \lambda^i w_i = \sum_{i=k+1}^n \lambda^i \pi(v_i) = \pi\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda^i v_i\right)$.

Also ist $\sum_{i=k+1}^n \lambda^i v_i \in \ker \pi = \text{Im } i = U'$. Da aber v_1, \dots, v_k eine Basis von U' bilden, gibt es

$\mu_1, \dots, \mu_k \in K$ mit $\sum_{i=k+1}^n \lambda^i v_i = \sum_{i=1}^k \mu^i v_i$. Setzt man jetzt für $1 \leq i \leq k$ $\lambda_i = -\mu_i$, so ergibt sich

$\sum_{i=1}^n \lambda^i v_i = 0$, so daß aus der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt, daß alle $\lambda_i = 0$, also

insbesondere $\lambda_{k+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$. Damit haben wir die lineare Unabhängigkeit von w_{k+1}, \dots, w_n .

Daß diese auch ein Erzeugendensystem von W bilden, sieht man so:

Ist $w \in W$ beliebig, so gibt es wegen der Surjektivität von π ein $v \in V$ mit $\pi(v) = w$.

Betrachten wir die Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^n \lambda^i v_i$, so ergibt sich

$$w = \pi(v) = \pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda^i v_i\right) = \pi\left(\sum_{i=1}^k \lambda^i v_i\right) + \sum_{i=k+1}^n \lambda^i \pi(v_i) = (\pi \circ i)\left(\sum_{i=1}^k \lambda^i u_i\right) + \sum_{i=k+1}^n \lambda^i w_i = \sum_{i=k+1}^n \lambda^i w_i$$

(Aus der Exaktheit folgt ja $\pi \circ i = 0$)

Also haben wir w als Linearkombination der w_i dargestellt.