

## Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 1, Abgabe 5.5.2009, 13:00 Uhr

1. Definiere Kategorien  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$  mit  $\text{ob}\mathbf{K}_1 = \text{ob}\mathbf{K}_2 = \text{ob}\mathbf{K}_3 = \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt

$$|\mathbf{K}_1(n, m)| \leq 1, |\mathbf{K}_2(n, m)| = \aleph_0, |\mathbf{K}_3(n, m)| = m^n.$$

2. Sei  $(M, \leq)$  eine geordnete Menge, aufgefaßt als Kategorie. Sei  $(m_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten in dieser Kategorie. Sei  $(P, (\pi_i)_{i \in I})$  ein Produkt und  $(C, (\mu_i)_{i \in I})$  ein Coprodukt dieser Familie. Beschreibe  $P$  und  $C$  ordnungstheoretisch.
3. Ein Funktor  $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$  heißt **treu**, falls  $F$  auf jeder  $\text{hom}$ -Menge  $\mathbf{K}(K, K')$  wie eine injektive Abbildung wirkt.

Überprüfe, ob folgende Funktoren **treu** sind.

- (a)  $\text{hom}(\mathbb{Z}, -): \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- (b)  $\text{hom}(\mathbb{Z}_n, -): \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

4. Zeige:

- (a) In der Kategorie  $\mathbf{Vekt}_k$  sind die Epimorphismen genau die surjektiven linearen Abbildungen.
- (b) In der Kategorie  $\mathbf{Ring}$  der Ringe mit 1 ist zwar jeder surjektive Ringhomomorphismus ein Epimorphismus, aber nicht umgekehrt (betrachte z. B. die Einbettung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ).