Prof. Dr. Hans-E. Porst 30.6.2009

Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 10, Abgabe 7.7.2009, 13:00 Uhr

1. In $\mathbf{K}$ lasse sich jeder Morphismus f faktorisieren als $f = m \circ e$ mit einem Monomorphismus m und einem regulären Epimorphismus e.

   Dann ist $(\mathrm{RegEpi}(\mathbf{K}), \mathrm{Mono}(\mathbf{K}))$ eine Faktorisierungsstruktur auf $\mathbf{K}$, und es gilt

   (a) $\mathrm{RegEpi}(\mathbf{K}) = \mathrm{ExtrEpi}(\mathbf{K})$.

   (b) Ist $f \circ g$ definiert, so gilt

   $$f, g \in \mathrm{RegEpi}(\mathbf{K}) = f \circ g \in \mathrm{RegEpi}(\mathbf{K}) \Longrightarrow f \in \mathrm{RegEpi}(\mathbf{K}).$$

2. Der Mengenfunktor

   $$X \longmapsto A \times X^n + B \times X^m + 1$$

   (A, B Mengen $n, m \in \mathbb{N}$) bewahrt gerichtete Colimiten.

3. Bewahrt der covariante Potenzmengenfunktor gerichtete Colimiten?

4. Eine Gruppe G heißt *endlich darstellbar*, wenn es eine endliche Menge Y und eine endliche Teilmenge $X \in FY$ (der freien Gruppe über Y) gibt, so dass

   $$G \simeq FY/_{\langle X \rangle}$$

   ($\langle X \rangle$ bezeichne den kleinsten Normalteiler von FY, der X enthält).

   Zeige: (mit diesen Bezeichnungen)
   Ist G endlich darstellbar, so ist G in **Grp** Coegalisator eines Paares in Homomorphismen

   $$r, s \colon FX \longrightarrow FY$$

   (X, Y endlich), und jeder solche Coegalisator ist endlich präsentierbar im kategoriellen Sinn.