

## Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 2, Abgabe 12.5.2009, 13:00 Uhr

1. Homomorphismen zwischen Gruppen sind bekanntlich Funktoren, faßt man die Gruppen als Kategorien auf. Beschreibe natürliche Transformationen zwischen Homomorphismen  $f, g: G \rightarrow H$ .
2. Ein Funktor  $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$  heißt **voll**, falls  $F$  auf jeder hom-Menge  $\mathbf{K}(K, K')$  wie eine surjektive Abbildung wirkt.

**Zeige:** Für jede kleine Kategorie  $\mathbf{K}$  wird durch  $Y(K) = \text{hom}_{\mathbf{K}}(-, K)$  ein Funktor  $Y: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{K}^{\text{op}}}$  definiert und dieser ist **treu** und **voll**.

3. Sei  $X$  eine Menge. Definiere für jede Menge  $B$  eine Abbildung  $ev_B: B^X \times X \rightarrow B$  durch

$$(f, x) \mapsto f(x).$$

Zeige, dass so eine natürliche Transformation

$$ev: (- \times X) \circ \text{hom}_{\mathbf{Set}}(X, -) \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Set}}$$

definiert wird.

4. (a) Sind  $f_i: A_i \rightarrow B_i$  ( $i = 1, 2$ ) Monomorphismen, so ist auch  $f_1 \times f_2: A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$  ein solcher.  
(b) Isomorphismen sind Monomorphismen und Epimorphismen, nicht aber umgekehrt.