

Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 3, Abgabe 19.5.2009, 13:00 Uhr

1. Sei \mathbf{K} eine Kategorie, $K \in \text{ob}\mathbf{K}$, und I eine Menge, aufgefaßt als diskrete Kategorie \mathbf{I} .
Zeige: Die in der Vorlesung definierten Kategorien $K \downarrow (A_i)_{i \in I}$ sind (bis auf Isomorphie von Kategorien) genau die Kategorien $\Delta \downarrow F$ für Funktoren $F: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{K}$, wobei $\Delta: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{I}}$ der “Konstanter-Funktor”-Funktorkonstruktor ist.

2. (a) Sei $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Vergißfunktorkonstruktor.
Zeige: U und $\mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, -)$ sind natürlich isomorph.
 (b) Durch $(V(M, \leq)) = \leq$ wird ein Funktor $V: \mathbf{POS} \rightarrow \mathbf{Set}$ definiert (Beweis - Die Relation \leq wird als Teilmenge von $M \times M$ betrachtet!). Finde eine geordnete Menge (Z, \leq) , so dass V und $\mathbf{POS}((Z, \leq), -)$ natürlich isomorph sind.

3. (a) Zeige für Kategorien \mathbf{K}, \mathbf{L} (\mathbf{K} klein) sind die Kategorien

$$(\mathbf{L}^{\mathbf{K}})^{\text{op}} \text{ und } \mathbf{L}^{\text{op}\mathbf{K}^{\text{op}}}$$
 isomorph.
 (b) Sei K ein Objekt in der Kategorie \mathbf{K} .
 Beschreibe die Co-Komma-Konstruktion $\mathbf{K} \downarrow K$ mit Hilfe der Komma-Konstruktion.

4. Ist $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ natürlich isomorph zu $\text{Id}_{\mathbf{K}}$, so ist F eine Äquivalenz. Ist jeder Isomorphismus $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ natürlich isomorph zu $\text{Id}_{\mathbf{K}}$?