

Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 4, Abgabe 26.5.2009, 13:00 Uhr

1. Sei \mathbf{K} eine Kategorie und K ein Objekt aus \mathbf{K} derart, dass alle Copotenzen $X \cdot K$ (X eine Menge) existieren.

Zeige: Der hom -Funktork

$$\text{hom}_{\mathbf{K}}(K, -) : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

hat einen Linksadjungierten.

2. Seien $F_i : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $G_i : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ Funktoren ($i = 1, 2$) und $F_i \overset{\eta_i}{\dashv} \underset{\epsilon_i}{G_i}$.

Zeige: Ist $\sigma : G_1 \longrightarrow G_2$ eine natürliche Transformation, so existiert genau eine natürliche Transformation $\tau : F_2 \longrightarrow F_1$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathbf{B}} & \xrightarrow{\eta_2} & G_2 F_2 \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow G_2 \tau \\ G_1 F_1 & \xrightarrow{\sigma_{F_1}} & G_2 F_1 \end{array}$$

kommutiert.

3. Sei $F \overset{\eta}{\dashv} \underset{\epsilon}{G}$ eine adjungierte Situation.

Zeige:

- (a) G ist treu genau dann, wenn alle ϵ_A Epimorphismen sind.
 - (b) G ist voll genau dann, wenn alle ϵ_A Schnitte (Coretraktionen) sind.
 - (c) F ist treu genau dann, wenn alle η_B Monomorphismen sind.
 - (d) F ist voll genau dann, wenn all η_B Retraktionen sind.
4. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Faßt man die Potenzmengen $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{P}(Y)$ als Kategorien auf (vermöge ihrer Ordnung), so sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ll} f[-] & : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ f^{-1}[-] & : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \end{array}$$

(d.h. Konstruktion von Bild bzw. Urbild von Teilmengen) Funktoren:

$f[-]$ ist linksadjungiert zu $f^{-1}[-]$.