

Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 8, Abgabe 23.6.2009, 13:00 Uhr

1. Sei $U: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein treuer Funktor und $X \xrightarrow{\eta_X} UK_X$ U -universell.
Zeige: $X \neq \emptyset \implies K_X$ ist ein Generator.
2. Sei $G: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein Funktor, der einen Linksadjungierten F besitzt.
Zeige: Für jedes Objekt K in \mathbf{K} existiert ein freies Objekt FX (X eine Menge) und ein Morphismus $e: FX \rightarrow K$, so dass $G(e)$ surjektiv ist.
3. Zeige, dass der kontravariante Potenzmengenfunctor $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ treu ist und einen Linksadjungierten hat. Welche Menge repräsentiert ihn?
4. Ein Epimorphismus $e: A \rightarrow B$ heiße *extremal* falls gilt:
Ist in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ & \searrow g & \nearrow m \\ & & C \end{array}$$

m ein Monomorphismus, so ist m schon ein Isomorphismus.

Zeige: Für einen Generator G in \mathbf{K} sind äquivalent:

- (a) $\mathbf{K}(G, -)$ reflektiert Isomorphismen,
- (b) $\mathbf{K}(G, -)$ reflektiert extremale Epimorphismen.