

Kategorien und Algebren

Sommersemester 2009

Übungsblatt 9, Abgabe 30.6.2009, 13:00 Uhr

1. Sei $D: (I, \leq) \rightarrow \mathbf{Set}$ ein gerichtetes Diagramm.

Eine D -natürliche Senke $(C, (D_i \xrightarrow{c_i} C)_i)$ ist ein Colimes von D genau dann, wenn gilt:

- (a) Die Familie $(c_i)_i$ ist überdeckend, d.h. $C = \cup_{i \in I} c_i[D_i]$.
- (b) Falls $c_i(y) = c_{i'}(y')$ für $y \in D_i, y' \in D_{i'}$, so existiert $k \in I, k \geq i, i'$ mit $D(i \rightarrow k)(y) = D(i' \rightarrow k)(y')$.

2. $P \in \text{ob}\mathbf{K}$ ist endlich präsentierbar genau dann, wenn gilt:

Für jedes gerichtete Diagramm $D: (I, \leq) \rightarrow \mathbf{K}$ mit Colimes $(C, (D_i \xrightarrow{c_i} C)_i)$ und jedes $f: P \rightarrow C$ gilt

- (a) f faktorisiert über ein c_i , d.h. es gibt $i \in I$ und $g: P \rightarrow D_i$, so dass

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 g \swarrow & & \downarrow f \\
 D_i & \xrightarrow{c_i} & C
 \end{array}
 \quad \text{kommutiert,}$$

- (b) diese Faktorisierung ist i.w. eindeutig, d.h., gilt auch $c_i \circ g' = f$ so existiert $j \in I, j \geq i$, so dass $D(i \rightarrow j)g = D(i \rightarrow j)g'$.

3. Zeige:

- (a) Eine Menge X ist endlich präsentierbar in \mathbf{Set} genau dann, wenn sie endlich ist.
- (b) Sei $U: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein Funktor mit Linksadjungiertem F . U bewahre gerichtete Colimiten (z. B. $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Vergißfunktor). Dann ist für jede endliche Menge X das Objekt FX endlich präsentierbar in \mathbf{A} .