Universität Bremen

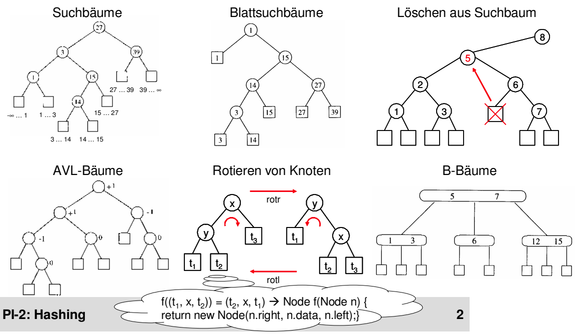
Hashing

Thomas Röfer

Hash-Funktionen
Hashing mit Verkettung
Offenes Hashing
Doppeltes Hashing
Dynamische Hash-Tabellen

Universität Bremen

Rückblick „Bäume 2“



Universität Bremen

Organisatorisches

- **Übungsblatt 5**
  - Ausgabe 17.05
  - Abgabe 01.06 (Dienstag), 10:00-11:30 in MZH 3060
  - Tutorien 17.05 (Mo), 18.05 (Di), 27.05 (Do)
- **Übungsblatt 6**
  - Ausgabe 24.05
  - Abgabe 07.06
  - Tutorien 24.05 (Mo), 25.05 (Di), 03.06 (Do)
- **Übungsblatt 7**
  - Ausgabe 07.06
  - Abgabe 14.06
- **Sonstiges**
  - Eclipse-Vorstellung 01.06 (Di), 9:00 s.t.-10:00 in MZH 7210

Universität Bremen

Überblick

- **Motivation**
  - Der Zugriff auf Elemente in sortierten Arrays oder balancierten Bäumen benötigt im Mittel O(log n)
  - Der Zugriff auf Elemente eines Arrays (bei bekanntem Index) benötigt aber nur O(1)
  - Schön wäre es, wenn man aus dem Suchwert *direkt* den *Index* eines Datensatzes in einem Array *berechnen* könnte → Hashing
- **Streuspeicherverfahren (Hash-Verfahren)**
  - Hash-Funktion
    - *Bildet Objekte auf ganze Zahlen (Hashcodes) ab*
    - *Hashcodes werden als numerische Schlüssel zur Identifikation der Objekte genutzt*
  - Hash-Tabelle
    - *Eine Reihung, in der die Objekte eingetragen werden*
    - *Dazu wird der Hashcode als Index genutzt, z.B. hashTable[object.hashCode()] = object;*

Universität Bremen

Beispiel – Mitarbeiterdatenbank

- **Hashcode**
  - Als Schlüssel wird der Anfangsbuchstabe des Nachnamens genutzt
  - Jedem dieser Buchstaben kann eine Zahl (z.B. Position im Alphabet) zugeordnet werden
  - Diese Zahl ist der Hashcode des Objekts „Mitarbeiter“
- **Beispiel**
  - Anton Wagner W → 23
  - Doris Bach B → 2
  - Doris May M → 13
  - Friedrich Dörig D → 4
- **Problem: Gleicher Hashcode unterschiedlicher Objekte**
  - Besserer Hashcode (hilft nur begrenzt)
  - Behandlung von Überläufen (*Kollisionen*)

1	
2	Doris Bach
3	
4	Friedrich Dörig
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	Doris May
:	
23	Anton Wagner
:	

Universität Bremen

Hash-Funktionen

- **Definition**
  - h : Menge der Objekte → ℕ
  - Ziel ist das kodieren komplizierter Objekte durch „Zerhacken“ (Hashing) in eine kleine Zahl, die als Schlüssel dienen kann
- **Beispiel**
  - h(„Doris Bach“) = 2
  - „Doris Bach“ wird also an Index 2 in der Hashtabelle gespeichert
    - *HT[2] = „Doris Bach“*
- **Ziele**
  - Die Hash-Funktion sollte vom gesamten Datensatz abhängen, so dass sie für unterschiedliche Datensätze möglichst auch unterschiedliche Hash-Codes liefert
  - Die Hash-Funktion sollte für alle tatsächlich vorkommenden Objekte möglichst gleich verteilt sein, d.h. die Hash-Codes sollten etwa gleich oft vorkommen
  - Berechnung des Hash-Wertes sollte nicht zu lange dauern
- **Modulare Hash-Funktion**
  - $h(k) = k \bmod m$

Universität Bremen

Von der Zeichenkette zum Hashcode

- **Betrachtung der Zeichen als Stellen einer Zahl**
  - Z.B. bei 8-Bit-Zeichen als Ziffern zur Basis 256
- **Beispiel**
  - „INFO“ → (73, 78, 70, 79)
  - h(„INFO“) = $(73 \cdot 256^3 + 78 \cdot 256^2 + 70 \cdot 256^1 + 79 \cdot 256^0) \bmod m$
  - m ist die Anzahl der Einträge der Hash-Tabelle
- **Problem**
  - Zwischenergebnisse werden bei längeren Zeichenketten zu groß für 32 Bit
  - h(„INFORMATIK“) = $(73 \cdot 256^9 + 78 \cdot 256^8 + \ldots + 75 \cdot 256^0) \bmod m$
- **Lösung**
  - Es gelten:
    - $(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
    - $(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$
  - Man kann schreiben (Horner-Schema):
    - h(„INFORMATIK“) $= (\ldots((73 \cdot 256) + 78) \cdot 256) + \ldots + 75) \bmod m$
      $= (\ldots((((73 \cdot 256) \bmod m) + 78) \bmod m) \cdot 256) + \ldots + 75) \bmod m$

Universität Bremen

Hash-Funktion in Java

- **Für Strings**
  - Implementierung in Schleife
  - Eigentlich a = 65536 für Unicode
- **hashCode()**
  - Die Klasse *Object* deklariert bereits eine Objektmethode *int hashCode()*
  - Sie sollte genutzt werden, um Hashcodes im Wertebereich von *int* zu erzeugen
  - Bei der Benutzung muss ihr Wert noch *modulo* Tabellenlänge verrechnet werden
  - Die Implementierung in *Object* nutzt die Adresse des Objekts als Hashcode
  - Daher muss *hashCode()* überschrieben werden, weil sonst gleiche Objekte unterschiedliche Hashcodes erhalten

```
static int hash(String s, int m)
{
  final int a = 256;
  int h = 0;
  for(int i = 0; i < s.length(); ++i)
    h = (h * a + s.charAt(i)) % m;
  return h;
}
```

```
class Person
{
  String name;
  public int hashCode()
  {
    return hash(name,
                Integer.MAX_VALUE);
  }
}
```


Universität Bremen

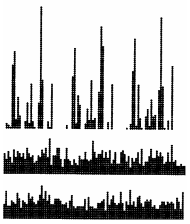
Hash-Funktionen

- **Ziel**
  - Zufällig verteilte Schlüssel auch bei nicht zufällig verteilten Daten
- **Beispiel: Moby Dick von Herman Melville**
  - Die ersten 1000 eindeutigen Wörter (in Englisch)
- **Wahl von *m* und *a***
  - $h(X) = (\ldots((x_0 \cdot a) \bmod m) + \ldots + x_n) \bmod m$
  - Ungünstig: $a = m$ → nur letztes Zeichen bestimmt den Hashcode
  - Ebenfalls ungünstig: $a = m \cdot n,\ n \in \mathbb{N}$
  - Günstig: a ist Primzahl und/oder m ist Primzahl
  - Günstig: a und m sind teilerfremd

m = 96, a = 128

m = 97, a = 128

m = 96, a = 127



Universität Bremen

Universelle Hash-Funktion

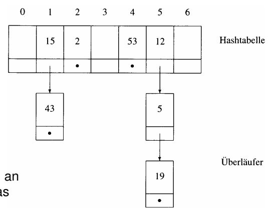
- **Universelle Hash-Funktion**
  - Theoretisch ideal, wenn die Wahrscheinlichkeit einer Kollision zwischen zwei Schlüsseln $1/m$ beträgt
- **Ansatz für Strings**
  - Wenn a von m unabhängig sein soll, wählt man ein pseudo-zufälliges a
  - D.h. für jede Stelle der Zeichenkette wird ein anderes a verwendet
- **Anmerkung**
  - $a_{n+1} = a_n \cdot b \bmod (m - 1)$ erzeugt pseudo-zufällige Zahlen im Bereich $[0 \ldots m - 2]$
  - Funktioniert nur, wenn m-1 kein Teiler von a oder b ist

```
static int hashU(String s, int m)
{
  int a = 31415;
  final int b = 27183;
  int h = 0;
  for(int i = 0; i < s.length(); ++i)
  {
    h = (h * a + s.charAt(i)) % m;
    a = a * b % (m - 1);
  }
  return h;
}
```


Universität Bremen

Verkettung der Überläufer

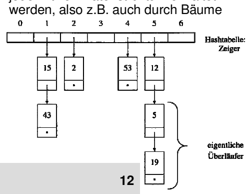
- **Suchen**
  - Beginne bei $HT(h(k))$
  - Durchsuche den Eintrag und Liste aller Überläufer
  - Falls gefunden → zurückliefern
  - Falls Listenende erreicht → nicht gefunden
- **Einfügen mit Überprüfung auf Doppelte**
  - Wert suchen
  - Falls nicht gefunden, in die Hashtabelle bzw. an das Ende der Überläuferliste einfügen (da das Listenende während der Suche bereits gefunden wurde
- **Einfügen ohne Überprüfung auf Doppelte**
  - Direkt bei $HT(h(k))$ bzw. an den Anfang der Überläuferliste einfügen



Universität Bremen

Verkettung der Überläufer

- **Löschen**
  - Wert suchen
  - Falls in Tabelle gefunden, dann ersten Überläufer aus der Liste aushängen und Eintrag in Tabelle überschreiben
  - Falls in Überläuferliste gefunden, dann einfach aus der Liste aushängen
- **Direkte Verkettung**
  - Alle Werte stehen in der Überläuferliste
  - Vorteile
    - *Einfachere Implementierung*
    - *Weniger Platzverschwendung für unbelegte Einträge in der Hashtabelle*
  - Nachteile
    - *Größerer Platzverbrauch durch zusätzliche Referenz*
    - *Etwas langsamer im Zugriff*
- **Aufwand**
  - Bei Gleichverteilung der Werte auf die Hashtabelle: $O(n / m)$
  - Hashing lohnt sich also, wenn m im Verhältnis zu n nicht zu klein ist
- **Anmerkung**
  - Prinzipiell können Überläufer durch jede Art von Datenstruktur verwaltet werden, also z.B. auch durch Bäume



Offenes Hashing

- **Motivation**
  - Bei der Verkettung der Überläufer wird zusätzlicher Speicher benötigt
  - Das Belegen (und Freigeben) des zusätzlichen Speichers kostet Zeit
- **Ansatz**
  - Alle Werte werden in der Hash-Tabelle gespeichert
  - Bei einer *Kollision* wird der Wert in einem Ausweichplatz gespeichert
  - Die Suche nach Ausweichplätzen heißt *Sondieren*
- **Lineares Sondieren**
  - Hashtabelle wird linear nach Werten durchsucht
    - $h(k)$, $h(k) - 1$, $h(k) - 2$, …, 0, $m - 1$, … $h(k) + 1$
  - Sondierungsfunktion
    - $s(j, k) = j$

Lineares Sondieren

- **Beispiel**
  - $m = 7$, $h(k) = k \bmod m$, $s(j, k) = j$
  - Einfügen von 12, 53

0	1	2	3	4	5	6
				53	12	

  - Einfügen von 5
    - *Sondierungsfolge 5-4-3*

0	1	2	3	4	5	6
			5	53	12	

  - Einfügen von 15, 2, 19
    - *Sondierungsfolge 5-4-3-2-1-0*

0	1	2	3	4	5	6
19	15	2	5	53	12	

- **Begriff**
  - *Belegungsfaktor*
    - *α = Anzahl der belegten Elemente / m*
- **Nachteile**
  - Häufungspunkte senken die Effizienz (*Primäre Häufung*)
  - Aufwand steigt erheblich, wenn α gegen 1 geht
- **Beispiel**
  - Nach dem Einfügen von 12, 53, 5 würden weitere Schlüssel landen
    - *Werte mit h(k) = 1 landen in HT[1]*
    - *Werte mit h(k) = 2…5 landen in HT[2]*

Quadratisches Sondieren

- **Sondierungsfunktion**
  - Hashtabelle wird quadratisch nach Werten durchsucht
    - $s(j, k) = \lceil j/2 \rceil^2 \cdot (-1)^j$
    - $h(k)$, $h(k) + 1$, $h(k) - 1$, $h(k) + 4$, $h(k) - 4$, …
- **Beispiel**
  - Einfügen von 12, 53, 5, 15, 2
    - *Sondierungsfolge für 5: h(5), h(5)+1)*

0	1	2	3	4	5	6
	15	2		53	12	5

  - Einfügen von 19
    - *Folge h(19) = 5, 5 + 1, 5 – 1, (5 + 4) mod 7 = 2, 5 – 4 = 1, (5 + 9) mod 7 = 0*

0	1	2	3	4	5	6
19	15	2		53	12	5

- **Nachteile**
  - Synonyme behindern sich gegenseitig, z.B. 5 und 19 (*Sekundäre Häufung*)
- **Aufwand lineares Sondieren**
  - Erfolglose Suche: $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$
  - Erfolgreiche Suche: $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)$
- **Aufwand quadratisches Sondieren**
  - Erfolglose Suche: $\frac{1}{1-\alpha} - \alpha + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$
  - Erfolgreiche Suche: $1 - \frac{\alpha}{2} + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$

Doppeltes Hashing

- **Motivation**
  - Auch mit quadratischem Sondieren stören sich alle Werte mit demselben Hashcode $h(k)$, weil die Sondierungsfunktion $s(j, k)$ nicht direkt von k abhängt
- **Ansatz**
  - Für das Sondieren wird eine zweite Hash-Funktion $h'(k)$ verwendet
    - $s(j, k) = j \cdot h'(k)$
    - $h(k)$, $h(k) - h'(k)$, $h(k) - 2 \cdot h'(k)$, …, $h(k) - (m - 1) \cdot h'(k)$
- **Anforderungen an $h'(k)$**
  - $h'(k) \neq 0$
  - Darf kein Teiler von m sein
    - Erfüllt, wenn m eine Primzahl ist
  - Sollte unabhängig von $h(k)$ sein
    - $p[h(k) = h(k')$ und $h'(k) = h'(k')] = p[h(k) = h(k')] \cdot p[h'(k) = h'(k')]$
- **Gute Wahl für $h'(k)$**
  - Falls m eine Primzahl ist:
    $h'(k) = 1 + k \bmod (m - 2)$

Doppeltes Hashing

- **Beispiel**
  - $m = 7$, $h(k) = k \bmod m$, $h'(k) = 1 + k \bmod (m - 2)$, $s(j, k) = j \cdot h'(k)$
  - Einfügen von 12, 53

0	1	2	3	4	5	6
				53	12	

  - Einfügen von 5, 15, 2
    - *Sondierungsreihenfolge für 5 ist h(5) = 5 mod 7 = 5, 5 – (1 + 5 mod 5) = 4, 5 – 2 = 3*

0	1	2	3	4	5	6
	15	2	5	53	12	

  - Einfügen von 19
    - *Sondierungsreihenfolge ist h(19) = 19 mod 7 = 5, 5 – (1 + 19 mod 5) = 0*

0	1	2	3	4	5	6
19	15	2	5	53	12	

Verbesserung der erfolgreichen Suche

- **Beobachtung**
  - Die durchschnittliche Suchzeit hängt von der Reihenfolge des Einfügens der Werte ab
- **Beispiel**

0	1	2	3	4	5	6
19	15		5	53	12	13

  (Suchzeit(12) + Suchzeit(53) + Suchzeit(5) + Suchzeit(15) + Suchzeit(13) + Suchzeit(19)) / 6 = 9 / 6 = 1.5

  - Einfügereihenfolge 53, 5, 15, 13, 19, 12

0	1	2	3	4	5	6
19	15	12		53	5	13

  Durchschnittliche Suchzeit = 8 / 6 = 1.33…

Algorithmus von Brent

- **Beispiel**
  - Einfügen von 12, 53

0	1	2	3	4	5	6
				53	12	

  - Einfügen von 5
    - *5 und 12 austauschen, 12 einfügen*

0	1	2	3	4	5	6
		12		53	5	

- **Aufwand**
  - Erfolgreiches Suchen:

$$1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{4}+\frac{\alpha^4}{15}+\ldots<2{,}5$$

  - Erfolgloses Suchen: $\frac{1}{1-\alpha}$

```
// Hash-Tabelle t, Hash-Fkt. h, h_
void brentInsert(Comparable k)
{
  int i = h(k);
  while(t[i] != null)
  {
    int b = (i - h_(k)) % t.length;
    int bb = (i - h_(t[i])) % t.length;
    if(t[b] != null && t[bb] == null)
    {
      Comparable kk = k;
      k = t[i]; t[i] = kk;
      i = bb;
    }
    else
      i = b;
  }
  t[i] = k;
}
```


Dynamische Hashtabellen

- **Motivation**
  - Bisher war die Größe m der Hash-Tabelle immer konstant, d.h. sie kann nur eine feste Anzahl von Werten aufnehmen
  - Oft kennt man die Maximalanzahl der einzufügenden Werte nicht, möchte aber nicht unnötig viel Speicher verschwenden
- **Ansatz**
  - Die Tabelle wächst und schrumpft in Zweierpotenzen, so dass sie immer zu weniger als 50% gefüllt ist
  - Vergrößerung und Verkleinerung sind teure Operationen, da alle Werte neu wieder eingefügt werden müssen
- **Bessere Methoden**
  - Siehe Ottmann/Widmeyer

```
// Hash-Tabelle t, Füllstand n
void insert(Comparable k)
{
  int i = h(k);
  while(t[i] != null)
    i = (i + 1) % t.length;
  t[i] = k;
  if(++n > t.length / 2)
    expand();
}

private void expand()
{
  Comparable[] t2 = t;
  t = new Comparable[t2.length * 2];
  for(int i = 0; i < t2.length; ++i)
    if(t2[i] != null)
      insert(t2[i]);
}
```


Beispiele