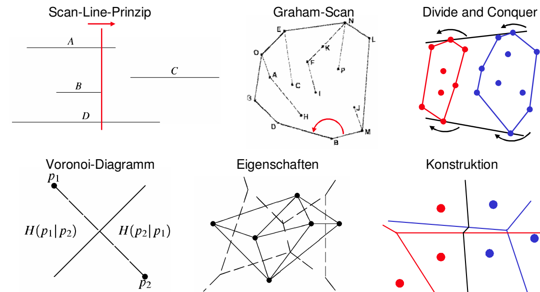
Graphenalgorithmen

Thomas Röfer

Begriffe
Repräsentationen
Kürzeste Wege
Minimale spannende Bäume

Rückblick „Geometrische Algorithmen“

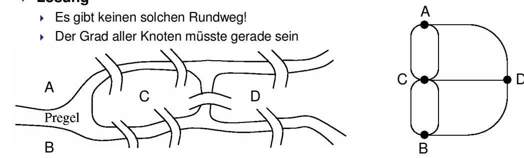


Motivation

- **Kürzeste Wege**
  - Wie besucht man Orte mit der kürzest möglichen Rundreise?
  - Was ist der schnellste Weg von Freiburg nach Bremen?
  - Was ist der billigste Weg von Freiburg nach Bremen?
- **Zuordnungsprobleme**
  - Wie ordnet man Arbeitkräfte einer Firma am besten denjenigen Tätigkeiten zu, für die sie geeignet sind?
  - Wie teilt man 210 Studierende so in Dreiergruppen auf, dass die Gruppenmitglieder miteinander auskommen und das gleiche Tutorium besuchen können?
- **Flussprobleme**
  - Welche Wassermenge kann die Kanalisation in Bremen höchstens verkraften?
- **Planungsprobleme**
  - Wann kann ein Projekt am frühesten beendet werden, wenn alle Tätigkeiten in der richtigen Reihenfolge ausgeführt werden?

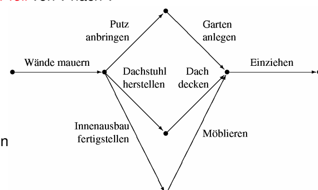
Motivation – Beispiel

- **Eulerweg (Euler, 1736)**
  - Wie muss ein Rundweg durch Königsberg aussehen, auf dem man jede Brücke über den Pregel genau einmal überquert und am Ende zum Ausgangspunkt zurückkehrt?
- **Ansatz**
  - Repräsentiere die Stadtteile durch Knoten
  - Repräsentiere die Brücken durch Kanten, die die Knoten verbinden
- **Lösung**
  - Es gibt keinen solchen Rundweg!
  - Der Grad aller Knoten müsste gerade sein



Gerichteter Graph

- **Definition**
  - Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ (*Digraph*) besteht aus einer Menge $V = \{1,2,3\ldots, |V|\}$ von *Knoten* (*vertices*) und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Pfeilen (*edges*, *arcs*)
  - Ein Paar $(v, v') = e \in E$ heißt *Pfeil* von v nach v'
  - v ist der Anfangsknoten und v' der Endknoten von e
  - v und v' heißen *adjazent*
  - v und v' sind mit e *inzident*, e ist *inzident* mit v und v'
- **Eigenschaften**
  - Da E eine Menge ist, kann jeder Pfeil nur einmal auftreten
    - *Es gibt keine parallelen Pfeile*



Begriffe

- **Eingangsgrad eines Knotens (*indegree*)**
  - Anzahl der einmündenden Pfeile
  - $indeg(v) = |\{ v' \mid (v', v) \in E \}|$
- **Ausgangsgrad eines Knotens (*outdegree*)**
  - Anzahl der ausgehenden Pfeile
  - $outdeg(v) = |\{ v' \mid (v, v') \in E \}|$
- **Teilgraph**
  - Ein Digraph $G' = (V', E')$, geschrieben $G' \subseteq G$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$
- **Weg von v nach v' (*path*)**
  - Ein Folge von Knoten $(v_0, v_1, \ldots, v_k) \in V$ mit $v_0 = v$, $v_k = v'$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 0\ldots k\text{-}1$
  - k ist die *Länge* des Wegs
  - Ein Weg heißt *einfach*, wenn kein Knoten mehrfach besucht wird
  - Ein Weg ist ein Teilgraph
- **Zyklus**
  - Ein Weg, der am Ausgangsknoten endet
  - Ein Digraph heißt zyklenfrei (azyklisch), wenn er keinen Zyklus enthält

Begriffe

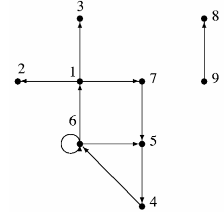
- **Gerichteter Wald**
  - Ein Digraph $G = (V, E)$, wenn E zyklenfrei ist und $indeg(v) \leq 1$ für alle $v \in V$
  - Jeder Knoten v mit $indeg(v) = 0$ ist eine Wurzel des Waldes
- **Gerichteter Baum**
  - Ein gerichteter Wald mit genau einer Wurzel
- **Spannender Wald von G = (*V*, *E*)**
  - Ein gerichteter Wald $W = (V, F)$ mit $F \subseteq E$
  - Falls W ein Baum, heißt W *spannender Baum* von G
- **Ungerichteter Graph**
  - Für jeden Pfeil (v, v') gibt es einen weiteren (v', v)
  - Ein ungerichteter Graph heißt zyklenfrei, wenn er keinen einfachen Zyklus aus wenigstens drei Pfeilen enthält

Repräsentation – Adjazenzmatrix

- **Ansatz**
  - Ein Graph $G = (V, E)$ wird in einer Boole'schen $|V| \times |V|$-Matrix $A_G = (a_{ij})$ mit $1 \leq i \leq |V|$, $1 \leq j \leq |V|$ gespeichert,

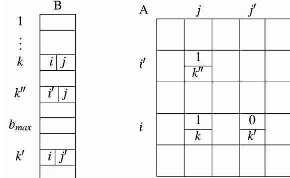
    wobei $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (i, j) \notin E \\ 1 & \text{falls } (i, j) \in E \end{cases}$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0



Repräsentation – Adjazenzmatrix

- **Aufwand**
  - Platz: $O(|V|^2)$
  - Initialisierung: Alle Matrixeinträge müssen gesetzt werden: $O(|V|^2)$
- **Effizientere Initialisierung**
  - Die Pfeile stehen in einem eindimensionalen Array *B*
  - In der Matrix *A* stehen Indizes auf dieses Array
  - *i* und *j* sind benachbart, wenn ihr Index innerhalb des befüllten Bereichs des Arrays $[1 \ldots b_{max}]$ liegt und dort tatsächlich der richtige Pfeil eingetragen ist
  - Aufwand: $O(|E|)$
  - Java: lohnt sich nur bei der mehrfacher Nutzung



$A[i, j]$ und $A[i', j]$ sind bedeutsam, $A[i, j']$ ist es nicht.

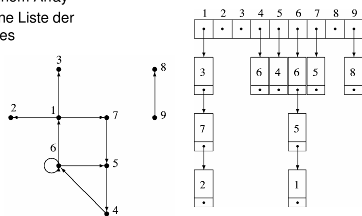
Adjazenzmatrix – Implementierung

```
class AdjMatrix
{
  private static class Edge
  {
    int row,
        column;

    Edge(int r, int c)
    {
      row = r;
      column = c;
    }
  }

  private final int numberOfNodes = 10;
  private final int numberOfEdges = 10;
  private int[][] a =
    new int[numberOfNodes][numberOfNodes];
  private Edge[] b = new Edge[numberOfEdges];
  private int bMax;
```

```
  void init()
  {
    bMax = 0;
  }

  boolean adjacent(int i, int j)
  {
    return a[i][j] >= 0 &&
           a[i][j] < bMax &&
           b[a[i][j]].row == i &&
           b[a[i][j]].column == j;
  }

  void addEdge(int i, int j)
  {
    if(!adjacent(i, j))
    {
      a[i][j] = bMax;
      b[bMax++] = new Edge(i, j);
    }
  }
}
```


Repräsentation – Adjazenzlisten

- **Ansatz**
  - Alle Knoten stehen in einem Array
  - Jeder Knoten enthält eine Liste der adjazenten Knotenindizes
- **Aufwand**
  - Platz: $O(|V| + |E|)$
  - Effizient: Aufzählen der Pfeile eines Knotens
  - Ineffizient: Hinzufügen und Entfernen von Knoten



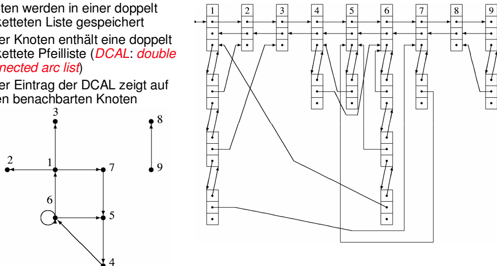
Adjazenzlisten – Implementierung

```
class AdjList
{
  static class Edge
  {
    int endNode;
    Edge next;

    Edge(int e, Edge n)
    {
      endNode = e;
      next = n;
    }
  }

  private final int numberOfNodes = 10;
  private Edge[] a =
    new Edge[numberOfNodes];
```

```
  boolean adjacent(int i, int j)
  {
    Edge e = a[i];
    while(e != null &&
          e.endNode != j)
      e = e.next;
    return e != null;
  }

  void addEdge(int i, int j)
  {
    if(!adjacent(i, j))
      a[i] = new Edge(j, a[i]);
  }
}
```

Repräs. – Doppelt verkettete Pfeilliste

- **Ansatz**
  - Knoten werden in einer doppelt verketteten Liste gespeichert
  - Jeder Knoten enthält eine doppelt verkettete Pfeilliste (*DCAL: double connected arc list*)
  - Jeder Eintrag der DCAL zeigt auf einen benachbarten Knoten



DCAL – Implementierung

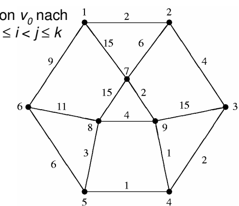
```
import java.util.LinkedList;

class AdjLinkedList extends LinkedList
{
  static class Node
  {
    private LinkedList edges = new LinkedList();

    boolean adjacent(Node node)
    {
      return edges.contains(node);
    }

    void addEdge(Node node)
    {
      if(!adjacent(node))
        edges.add(node);
    }
  }
}
```


Kürzeste Wege – Definitionen

- **Bewerteter Graph**
  - Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer reellwertigen Bewertungsfunktion $c : E \to \mathbb{R}$
  - Entsprechend heißt ein Digraph mit Bewertungsfunktion bewerteter Digraph
  - Für eine Kante $e \in E$ heißt $c(e)$ Bewertung (Länge, Gewicht, Kosten) der Kante e
- **Distanzgraph**
  - Die Länge jeder Kante ist nicht negativ, also $c : E \to \mathbb{R}_0^+$
- **Wege**
  - Die Länge $c(G)$ des Graphen G ist die Summe der Länge aller Kanten
  - Die Länge eines Wegs $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ist die somit die Summe $\sum_{i=0}^{k-1} c((v_i, v_{i+1}))$
  - Die Distanz d von einem Knoten v zu einem anderen Knoten v' ist $d(v, v') = \min\{\, c(p) \mid p \text{ ist Weg von } v \text{ nach } v' \,\}$
- **Kürzester Weg**
  - Ein Weg p zwischen v und v', wenn $c(p) = d(v, v')$

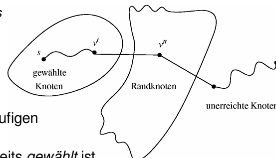
Kürzeste Wege in Distanzgraphen

- **Ansatz**
  - Man findet den kürzesten Weg, indem man, beginnend mit dem Startknoten, immer längere Wege konstruiert, und zwar in der Reihenfolge ihrer Länge
- **Optimalitätsprinzip**
  - Wenn $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ein kürzester Weg von v_0 nach v_k ist, dann ist jeder Teilweg $p = (v_i, \ldots, v_j)$, $0 \le i < j \le k$ ebenfalls ein kürzester Weg
- **Invarianten**
  - Für alle kürzesten Wege $sp(s, v)$ und Kanten (v, v') gilt: $c(sp(s, v)) + c((v, v')) \ge c(sp(s, v'))$
  - Für mindestens einen kürzesten Weg $sp(s, v)$ und eine Kante (v, v') gilt: $c(sp(s, v)) + c((v, v')) = c(sp(s, v'))$



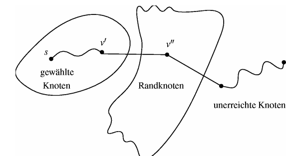
Algorithmus von Dijkstra (1959)

- **Jeder Knoten gehört zu einer von drei Klassen**
  - Gewählte Knoten
    - *Zu ihnen ist der kürzeste Weg vom Anfangsknoten s bereits bekannt*
  - Randknoten
    - *Zu ihnen kennt man einen Weg von s*
  - unerreichte Knoten
    - *Zu ihnen kennt man keinen Weg*
- **Pro Knoten v merken**
  - Die bisherige Entfernung zu s
  - Den Vorgänger von v auf dem vorläufigen kürzesten Weg von s nach v
  - Eine Markierung, ob der Knoten bereits *gewählt* ist
- **Zusätzlich**
  - Eine Menge speichert die Randknoten

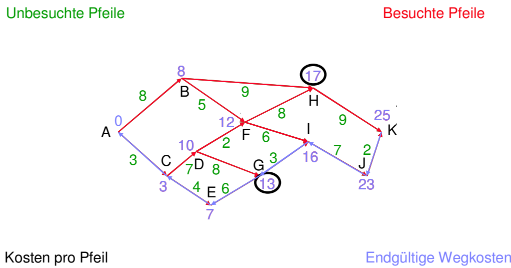


Algorithmus von Dijkstra (1959)

- **Initialisierung**
  - Alle Knoten außer dem Startknoten s sind nicht gewählt
  - Die Entfernung zu s ist 0, zu allen anderen Knoten ∞
- **Alle zu s adjazenten Knoten gehören zum Rand R**
  - $R := \emptyset$
  - ergänze Rand R bei s
- **Berechne Wege ab s**
  - Solange $R \neq \emptyset$
    - *wähle $v \in R$ mit v.Entfernung minimal*
    - *v aus R*
    - *v.gewählt := true*
    - *ergänze Rand R bei v*
- **Ergänze Rand R bei v**
  - Für alle $(v, v') \in E$
  - Falls nicht *v'.gewählt* und *v.Entfernung* + $c((v, v'))$ < *v'.Entfernung*)
    - *v'.Vorgänger := v*
    - *v'.Entfernung := v.Entfernung + c((v, v'))*
    - *$R := R \cup \{v'\}$*



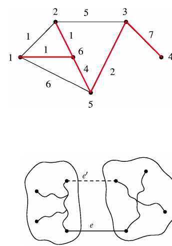
Dijkstra-Algorithmus – Beispiel



Dijkstra – Verwaltung des Rands

- **Aufwand**
  - $|E| \cdot O$(Rand erweitern) + $|V| \cdot O$(Minimum entnehmen)
- **Implizite Speicherung des Rands**
  - Rand wird nicht separat gespeichert, sondern implizit in der Knotenmenge
  - *Minimum entnehmen* heißt dann, alle nicht gewählten Knoten *v* nach der minimalen *v.Entfernung* zu durchsuchen
  - Aufwand: $|E| \cdot O(1) + |V| \cdot O(|V|) = O(|E| + |V|^2)$
  - Lohnt sich, wenn Graph dicht mit Kanten besetzt ist
- **Explizite Speicherung des Rands**
  - Nutzung einer Vorrangwarteschlange zur Speicherung des Rands
  - Aufwand, z.B. bei Verwendung eines Linksbaums:
    $|E| \cdot O(\log |V|) + |V| \cdot O(\log |V|) = O(|E| \log |V| + |V| \log |V|)$
  - Lohnt sich, wenn Graph dünn besetzt mit Kanten ist

Minimale spannende Bäume



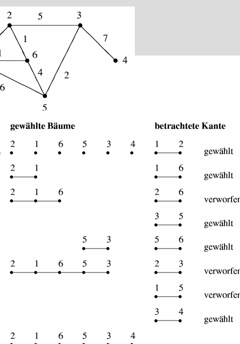
- **Definition**
  - Ein minimaler spannender Baum (MST: minimum spanning tree) eines Graphen G ist ein spannender Baum von G von minimaler Gesamtlänge
- **Greedy-Algorithmus *MST*(*V*, *E*) = (*V*, *E*')**
  - E' := ∅
  - solange noch nicht fertig
    - *wähle geeignete Kante e ∈ E*
    - *E' := E' ∪ {e}*
- **Auswahlprozess**
  - Kanten sind entweder gewählt, verworfen oder unentschieden
- **Schnitt**
  - Ein Schnitt in einem Graphen zerlegt die Knotenmenge V in zwei Untermengen S und $\overline{S}$ = V – S
  - Eine Kante kreuzt den Schnitt, wenn sie mit einem Knoten aus S und einem aus $\overline{S}$ inzident ist

Minimale spannende Bäume

- **Regel 1: Wähle eine Kante**
  - Wähle einen Schnitt, den keine der gewählten Kanten kreuzt
  - Wähle eine kürzeste unter den unentschiedenen Kanten, die den Schnitt kreuzen
- **Regel 2: Verwirf eine Kante**
  - Wähle einen einfachen Zyklus, der keine verworfene Kante enthält
  - Verwirf die längste unter den unentschiedenen Kanten im Zyklus
- **Präzisierung des Algorithmus**
  - Wähle geeignete Kante *e* ∈ *E*
    - *Wiederhole*
      - *wende eine anwendbare Auswahlregel an*
    - *bis Kante e ∈ E mit Regel 1 gewählt oder es keine unentschiedene Kante mehr gibt*
  - Noch nicht fertig
    - *Es gibt noch unentschiedene Kanten*

Algorithmus von Kruskal

- **Ansatz**
  - Anfangs ist jeder Knoten des Graphen ein gewählter Baum
  - Auswahlschritt für jede Kante *e* in aufsteigender Reihenfolge der Kantenlänge
    - *Falls e beide Endknoten im selben Baum hat, verwirf e, sonst wähle e*
- **Algorithmus *MST*(*V*, *E*) = (*V*, *E*')**
  - *E*' := ∅
  - Sortiere *E* nach aufsteigender Länge
  - *makeSet*(*v*) für alle *v* ∈ *V*
  - Für alle (*v*, *w*) ∈ *E*, aufsteigend
    - *Falls find(v) ≠ find(w)*
      - *union(find(v), find(w))*
      - *E' := E' ∪ { (v, w) }*



Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra

- **Ansatz**
  - Zu jedem Zeitpunkt gibt es nur genau einen gewählten Baum
  - Zu Beginn besteht dieser nur aus dem Startknoten *s*
  - Später bilden alle gewählten Kanten und deren inzidente Knoten den gewählten Baum
- **Algorithmus**
  - Wähle einen beliebigen Startknoten *s*
  - Führe Auswahlschritt (|*V*| - 1)-mal durch
    - *Wähle eine Kante mit minimaler Länge, für die genau ein Endknoten zum gewählten Baum gehört*