



Universität Bremen

Suchen

Thomas Röfer

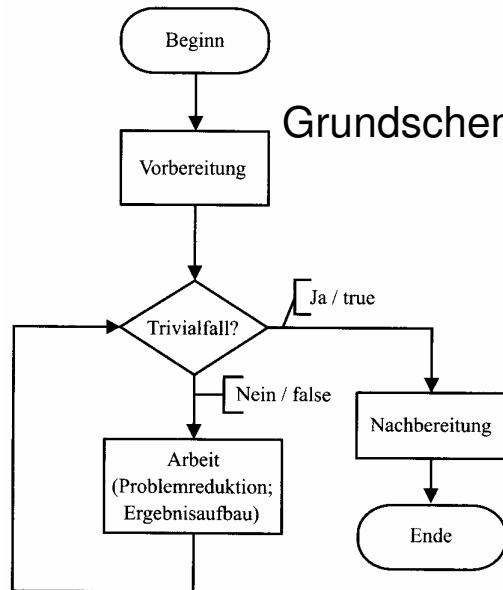
Flache/Tiefe Gleichheit

Lineare Suche

Binäre Suche

Asymptotische Komplexität

Rückblick „Algorithmenkonstruktion“

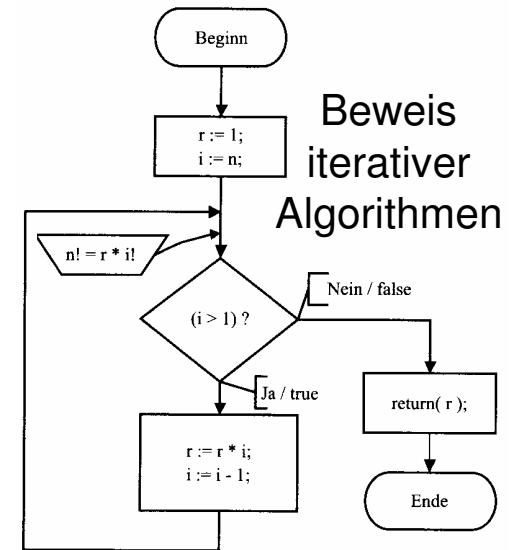


Beweis rekursiver Algorithmen

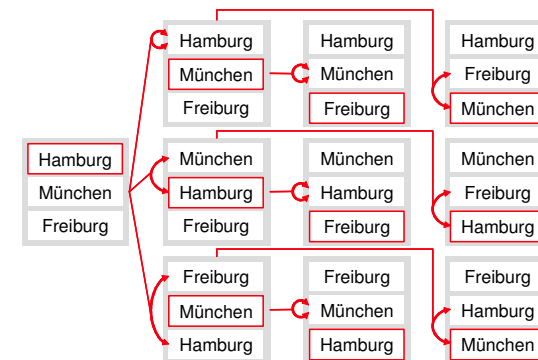
$$factorial(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot factorial(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktionsanfang

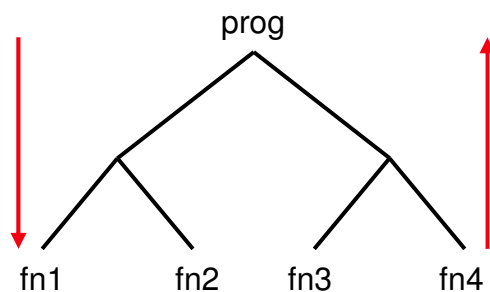
Induktionsschritt



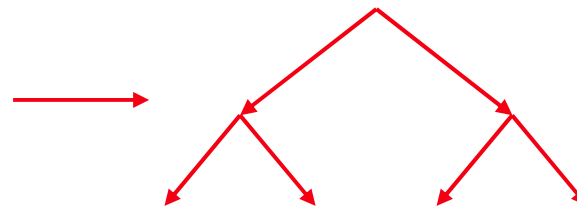
Rundreiseproblem



Top-down / bottom-up



Greedy / Divide and Conquer



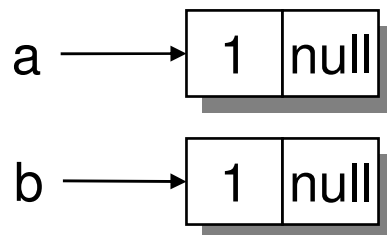
Gleichheit

▶ Identität

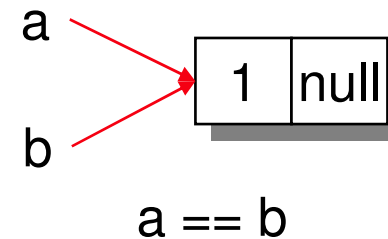
- ▶ Es handelt sich um dasselbe Objekt
- ▶ In Java: `==` für Referenzen

▶ Flache Gleichheit

- ▶ Alle Elemente zweier Objekte sind „flach“ gleich
- ▶ In Java: `==` für alle Elemente der Objekte



`a != b && a.shallowEquals(b)`



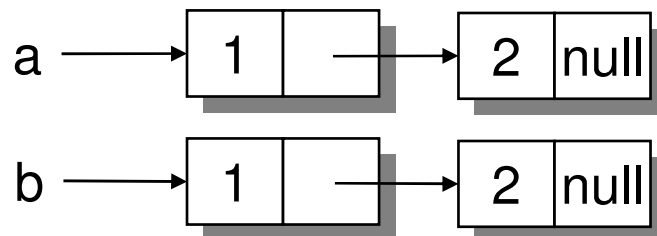
```
class List
{
    List next;
    int value;

    boolean shallowEquals(List other)
    {
        return other != null &&
            value == other.value &&
            next == other.next;
    }
}
```

Gleichheit

▶ Tiefe Gleichheit

- ▶ Alle Elemente zweier Objekte sind „tief“ (rekursiv) gleich
- ▶ In Java: *equals()* auf Objekten, wenn *equals()* für alle beteiligten Klassen geeignet definiert ist
- ▶ *equals()* in Klasse Object entspricht nur `==`, muss also überschrieben werden



`!a.shallowEquals(b) && a.equals(b)`

```
class List
{
    List next;
    int value;

    boolean equals(List other)
    {
        return other != null &&
            value == other.value &&
            (next == other.next ||
             next != null &&
             next.equals(other.next));
    }
}
```



Tiefe Kopie

▶ Ziel

- ▶ Erstellen einer vollständigen Kopie, die unabhängig vom Original ist

▶ In Java

- ▶ Die Klasse Object enthält bereits eine Funktion *clone()* zu diesem Zweck
- ▶ Sie erzeugt aber nur eine *CloneNotSupportedException*, es sei denn, eine Klasse implementiert die Schnittstelle *Cloneable*

▶ Implementierung

- ▶ *Cloneable* implementieren
- ▶ In *clone()*
 - ▶ Neues Objekt erstellen
 - ▶ Alle Basistypen-Attribute kopieren
 - ▶ Für alle Objekt-Attribute wiederum *clone()* aufrufen

```
class List implements Cloneable
{
    List next;
    int value;

    public Object clone()
    {
        List copy = new List();
        copy.value = value;
        if(next != null)
            copy.next = (List) next.clone();
        return copy;
    }
}
```



Lineare Suche

- ▶ **Voraussetzungen**
 - ▶ Suche in Reihung oder Liste
 - ▶ Gleichheit der Elemente muss definiert sein
- ▶ **Ansatz**
 - ▶ Vergleiche Suchwert der Reihe nach mit allen Elementen der Reihung/Liste
- ▶ **Komplexität**
 - ▶ Bester Fall: Erstes Element ist das gesuchte
 - ▶ Schlechtester Fall: Das gesuchte Element ist nicht vorhanden
 - ▶ Im Mittel wird die halbe Reihung oder Liste durchsucht

```
int linearSearch(Object[] a,
                 Object key)
{
    int i = 0;
    while(i < a.length &&
           !a[i].equals(key))
        ++i;
    return i == a.length ? -1 : i;
}
```



Lineare Suche mit Wächter/Stopper

▶ Ansatz

- ▶ Gesuchtes Element wird ans Ende der Reihung/Liste gestellt, damit es auf jeden Fall gefunden wird
- ▶ Dadurch entfällt der Vergleich mit der Länge der Reihung/Liste

▶ Nachteile

- ▶ Vorbereitung dauert länger
- ▶ Für Listen nur sinnvoll, wenn man direkten Zugriff auf das Ende hat
- ▶ Reihung/Liste wird zeitweilig verändert, mögliche Probleme bei paralleler Ausführung

```
int guardSearch(Object[] a,
                Object key)
{
    Object last = a[a.length - 1];
    if(last == key)
        return a.length - 1;
    else
    {
        a[a.length - 1] = key;
        int i = 0;
        while(!a[i].equals(key))
            ++i;
        a[a.length - 1] = last;
        return i == a.length - 1 ? -1 : i;
    }
}
```



Lineare Suche ohne Längentest

▶ Grund

- ▶ Java prüft ohnehin die Gültigkeit eines Index bzw. einer Referenz

▶ Ansatz

- ▶ Nicht auf Länge testen
- ▶ Java-Ausnahme fangen

▶ Nachteile

- ▶ Erzeugung und Fangen von Ausnahme kostet Zeit

```
int exceptionSearch(Object[] a,
                   Object key)
{
    try
    {
        int i = 0;
        while(!a[i].equals(key))
            ++i;
        return i;
    }
    catch (ArrayIndexOutOfBoundsException e)
    {
        return -1;
    }
}
```



Ordnungsrelationen

▶ Definition

- ▶ Eine Ordnungsrelation definiert eine Ordnung zwischen Elementen eines Typs
- ▶ Typische Ordnungsrelationen sind $<$ und $>$
- ▶ Ordnungsrelationen sind transitiv:
 - ▶ $a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$
 - ▶ *Dadurch können Werte auch implizit miteinander verglichen werden*
- ▶ Eine Ordnung kann über allen Typen definiert werden, ist aber nicht immer intuitiv
 - ▶ *Äpfel > Birnen?*

▶ In Java

- ▶ Operatoren $<$, $>$, $<=$, $>=$ für alle Basistypen außer boolean
- ▶ Methode *compareTo()* in Schnittstelle *Comparable*

```
void test(Comparable a, Comparable b)
{
    switch(a.compareTo(b))
    {
        case -1:
            System.out.println("a < b");
            break;
        case 0:
            System.out.println("a == b");
            break;
        case 1:
            System.out.println("a > b");
            break;
    }
}
```

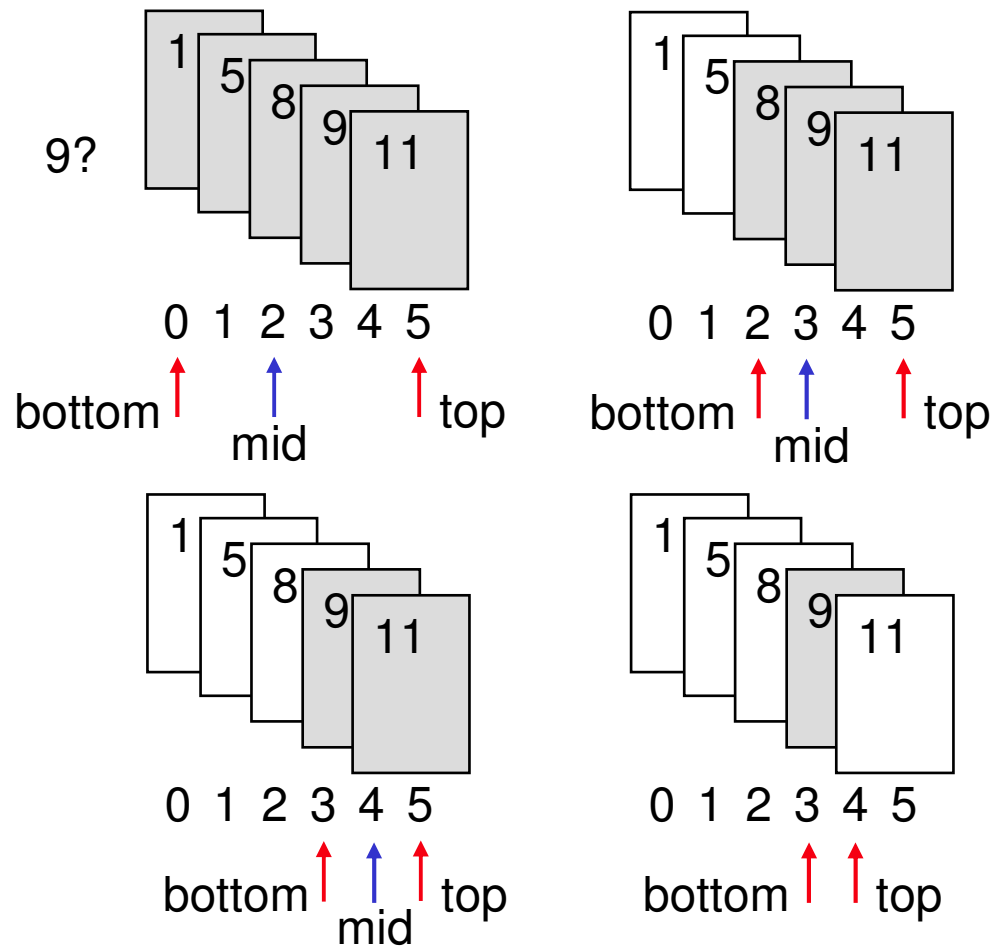


Binäre Suche

- ▶ **Voraussetzungen**
 - ▶ Suche in Reihung
 - ▶ Ordnungsrelation muss für Elemente definiert sein
 - ▶ Elemente müssen entsprechend der Ordnungsrelation sortiert sein
- ▶ **Ansatz**
 - ▶ Divide and Conquer
 - ▶ Durch Sortierung muss nicht mit allen Elementen verglichen werden

```
int binarySearch(Comparable[] a,
                 Comparable key)
{
    if(a.length == 0)
        return -1;
    else
    {
        int bottom = 0,
            top = a.length;
        while(bottom + 1 != top)
        {
            int mid = (top + bottom) / 2;
            if(a[mid].compareTo(key) > 0)
                top = mid;
            else
                bottom = mid;
        }
        return a[bottom].equals(key)
            ? bottom : -1;
    }
}
```

Binäre Suche – Beispiel



```
int binarySearch(Comparable[] a,
                 Comparable key)
{
    if(a.length == 0)
        return -1;
    else
    {
        int bottom = 0,
            top = a.length;
        while(bottom + 1 != top)
        {
            int mid = (top + bottom) / 2;
            if(a[mid].compareTo(key) > 0)
                top = mid;
            else
                bottom = mid;
        }
        return a[bottom].equals(key)
            ? bottom : -1;
    }
}
```



Komplexität

▶ Definition

- ▶ Die Komplexität eines Algorithmus ist die Anzahl der benötigten Programmschritte (der *Aufwand*) in Abhängigkeit von der *Größe* der Eingabe

▶ Arten

- ▶ Zeitkomplexität
 - ▶ *ist üblicherweise mit „Komplexität“ gemeint*
- ▶ Platzkomplexität

▶ Zu betrachtende Fälle

- ▶ Schlechtester Fall (worst case)
- ▶ Bester Fall (best case)
- ▶ Durchschnittlicher Fall (average case)

```
int sqr(int x)
{
    return x * x;
}

int factorial(int n)
{
    return n > 0
        ? n * factorial(n - 1)
        : 1;
}
```



Exakte Bestimmung – Multiplikationen

	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	1	0	0
2	3	3	0	1
3	5	6	1	3
4	8	10	3	6
5	12	15	6	10
6	17	21	10	15
7	23	28	15	21
8	30	36	21	28
9	38	45	28	36
10	47	55	36	45

```
int f1(int n)
{
    int res = 1;
    for(int j = 1; j < n; ++j)
        for(int i = 1; i < j; ++i)
            res = res * i;
    return res;
}
```

$$\begin{aligned} M(n) &= (n-2) + M(n-1) \\ &= (n-2) + (n-3) + M(n-4) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} k \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$



Exakte Bestimmung – Inkremente

	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	1	0	0
2	3	3	0	1
3	5	6	1	3
4	8	10	3	6
5	12	15	6	10
6	17	21	10	15
7	23	28	15	21
8	30	36	21	28
9	38	45	28	36
10	47	55	36	45

```
int f1(int n)
{
    int res = 1;
    for(int j = 1; j < n; ++j)
        for(int i = 1; i < j; ++i)
            res = res * i;
    return res;
}
```

$$\begin{aligned} I(n) &= (n-2)+1+I(n-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$



Exakte Bestimmung – Zuweisungen

	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	1	0	0
2	3	3	0	1
3	5	6	1	3
4	8	10	3	6
5	12	15	6	10
6	17	21	10	15
7	23	28	15	21
8	30	36	21	28
9	38	45	28	36
10	47	55	36	45

```
int f1(int n)
{
    int res = 1;
    for(int j = 1; j < n; ++j)
        for(int i = 1; i < j; ++i)
            res = res * i;
    return res;
}
```

$$\begin{aligned} Z(n) &= 1+1+I(n) \\ &= 2 + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$



Exakte Bestimmung – Vergleiche

	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	1	0	0
2	3	3	0	1
3	5	6	1	3
4	8	10	3	6
5	12	15	6	10
6	17	21	10	15
7	23	28	15	21
8	30	36	21	28
9	38	45	28	36
10	47	55	36	45

```
int f1(int n)
{
    int res = 1;
    for(int j = 1; j < n; ++j)
        for(int i = 1; i < j; ++i)
            res = res * i;
    return res;
}
```

$$\begin{aligned} V(n) &= n + V(n-1) \\ &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$G(n) = M(n) + I(n) + V(n) + Z(n)$$

Asymptotische Komplexität

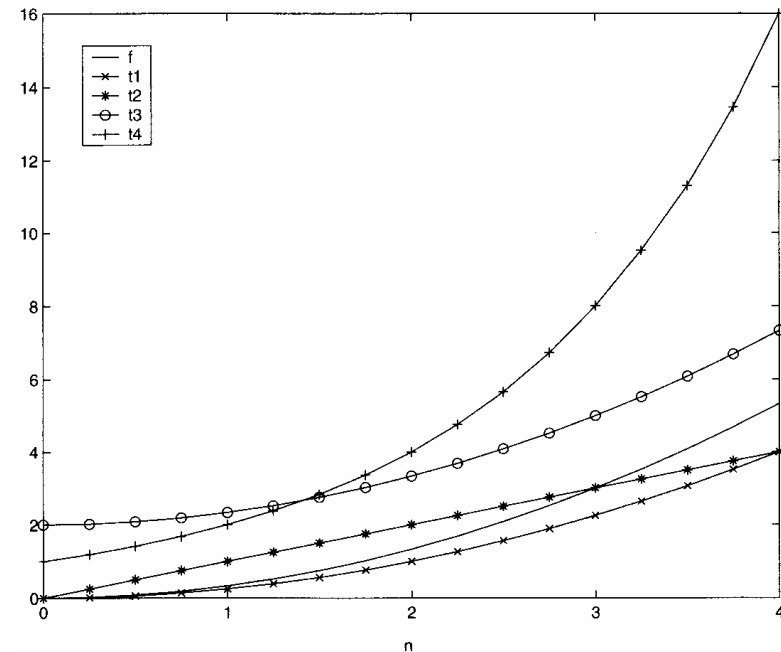
Definition

- ▶ Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$
- ▶ Die Ordnung von f ist die Menge

$$O(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^* \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n)\}$$
- ▶ $O(f(n))$ charakterisiert das Wachstum von f
- ▶ Sie enthält alle Funktionen, deren Graph maximal so stark wächst wie der Graph von f
 - ▶ *bis auf Umbezeichnung der Einheiten auf der y-Achse*

Beispiel

- ▶ $f(n) = 1/3 n^2$
- ▶ $t_1(n) = 1/4 n^2 \in O(f(n)), n_0 = 1, c = 1$
- ▶ $t_2(n) = n \in O(f(n)), n_0 = 3, c = 1$
- ▶ $t_3(n) = 1/3 n^2 + 2 \in O(f(n)), n_0 = 3, c = 2$
- ▶ $t_4(n) = 2^n \notin O(f(n))$





Beweise

▶ $n^2 \in O(n^3)$?

- ▶ Zu zeigen: $\exists c \in \mathbb{R}^+$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $n^2 \leq c \cdot n^3$
- ▶ Dies gilt z.B. ab $c = 1, n_0 = 1$

▶ $n^3 \in O(n^2)$?

- ▶ Zu zeigen: $\exists c \in \mathbb{R}^+$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $n^3 \leq c \cdot n^2$
- ▶ Dies erfordert ein c , so dass für alle n gilt: $n \leq c$
- ▶ Ein solches c kann es nicht geben, daher gilt: $n^3 \notin O(n^2)$

▶ Weitere Aussagen

- ▶ $O(f(n) + g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$
- ▶ $O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$
- ▶ $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$
- ▶ $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n))$



Typische Aufwandsklassen

- ▶ **$O(1)$**
 - ▶ Z.B. `sqr()`
- ▶ **$O(\log n)$**
 - ▶ Z.B. `binarySearch()`, $n = a.length$
- ▶ **$O(n)$**
 - ▶ Z.B. `linearSearch()`, $n = a.length$
- ▶ **$O(n \log n)$**
 - ▶ Sortieren mit Divide and Conquer
- ▶ **$O(n^2)$, $O(n^3)$...**
 - ▶ f1 (Folie 13ff)
- ▶ **$O(2^n)$, $O(3^n)$, ...**
- ▶ **$O(n!)$**
 - ▶ Rundreiseproblem