Universität Bremen

Sortieren

Thomas Röfer

Permutationen

Naives Sortieren

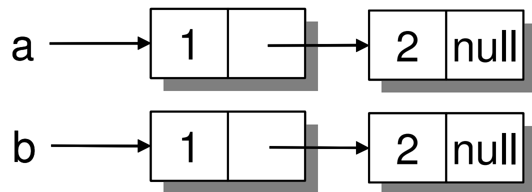
Sortieren durch Einfügen, Auswählen, Vertauschen, Mischen

QuickSort

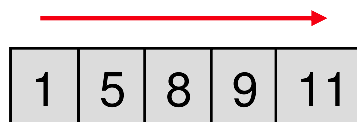
Comparator

Rückblick „Suchen“

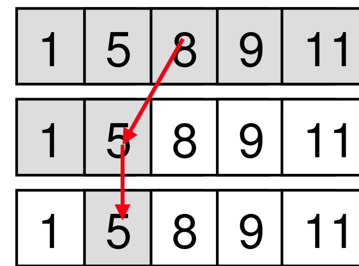
Identität/Flache/Tiefe Gleichheit



Lineare Suche



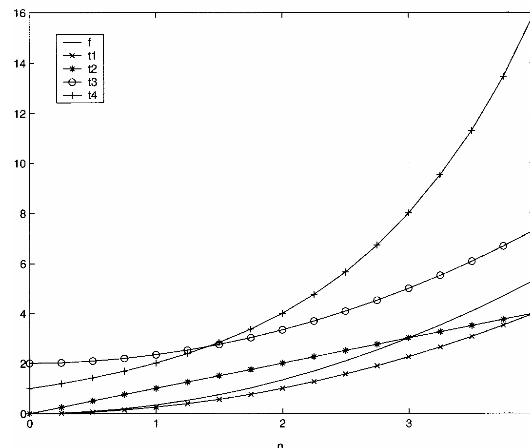
Binäre Suche



Aufwand

	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	1	0	0
2	3	3	0	1
3	5	6	1	3
4	8	10	3	6
5	12	15	6	10
6	17	21	10	15
7	23	28	15	21
8	30	36	21	28
9	38	45	28	36
10	47	55	36	45

Asymptotische Komplexität



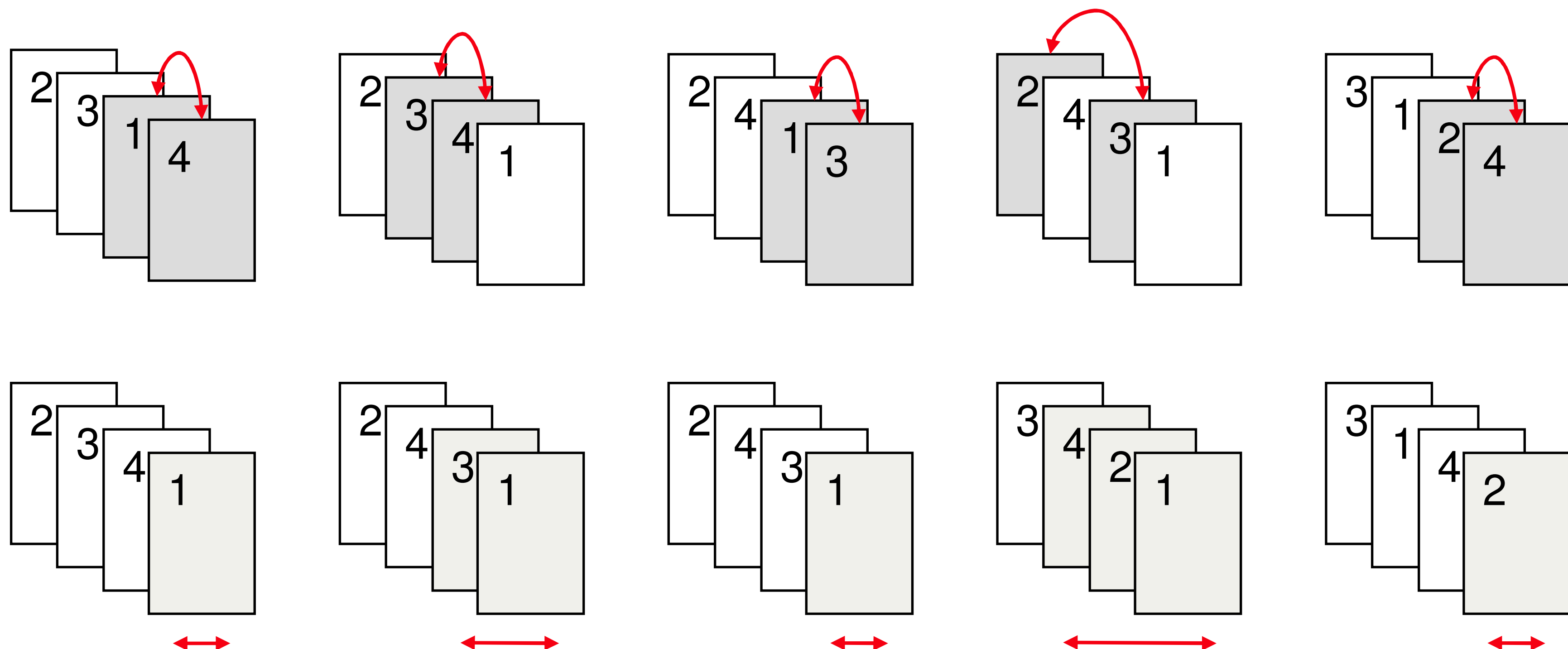
Typische Aufwandsklassen

O(1) : swap()
O(log n) : binarySearch()
O(n) : linearSearch()
O(n log n) : mergeSort()
O(n²) : selectSort()
O(n!) : naiveSort()

Permutieren nach Dijkstra

- **Ziel**
  - Eine Funktion, die aus einer gegebenen Permutation die jeweils nächste erzeugt
  - Voraussetzung: Es existiert eine Ordnungsrelation zwischen den Elementen der zu permutierenden Folge
- **Algorithmus**
  - Folge $a_0 \dots a_{n-1}$
  - Finde das letzte a_i, das kleiner als a_{i+1} ist
  - Finde das letzte a_j, das größer als a_i ist
  - Vertausche die beiden
  - Drehe die Reihenfolge der Elemente ab a_{i+1} um
- **Aufwand**
  - Im Mittel O(1)
    - *im Mittel werden nur 1,76 Elemente durchsucht und umgedreht*

Permutieren nach Dijkstra



Permutieren nach Dijkstra

```
class Permutation
{
  static void nextPerm(Comparable[] a)
  {
    int i;
    for(i = a.length - 2; i >= 0 &&
        a[i].compareTo(a[i+1]) >= 0; --i)
      ;
    if(i >= 0)
    {
      int j;
      for(j = a.length - 1;
          a[j].compareTo(a[i]) <= 0; --j)
        ;
      swap(a, i, j);
    }
    reverse(a, i + 1, a.length - 1);
  }
```

```
  static private void reverse(
    Comparable[] a, int l, int r)
  {
    while(l < r)
      swap(a, l++, r--);
  }

  static void swap(Object[] o,
    int a, int b)
  {
    Object temp = o[a];
    o[a] = o[b];
    o[b] = temp;
  }
}
```

Sortieren

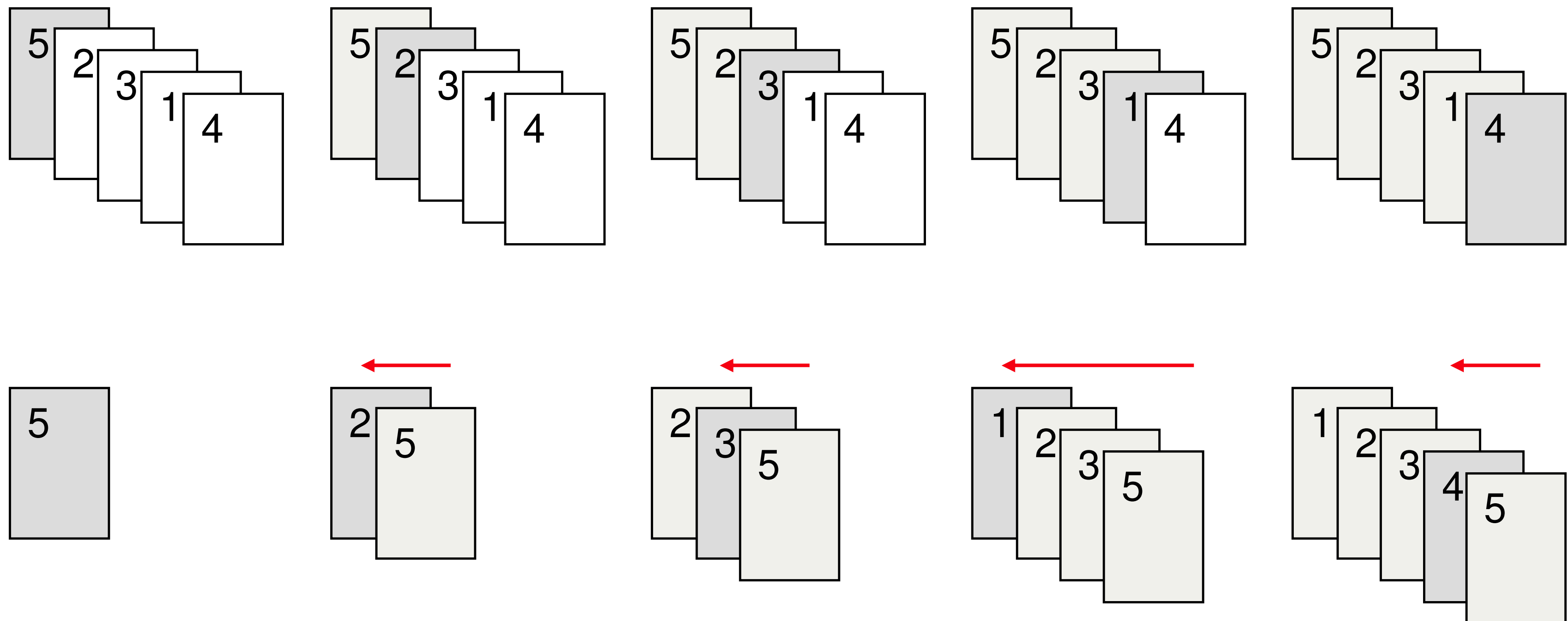
- **Definition**
  - Eine sortierte Folge *S* ist eine *Permutation* einer Folge *T*
    - $S = perm(T)$
  - *S* bezeichnet man als *aufsteigend sortiert*, wenn jedes Element größer oder gleich seinem Vorgänger in der Folge ist
    - $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{n-1}$
  - *S* bezeichnet man als *absteigend* sortiert, wenn jedes Element kleiner oder gleich seinem Vorgänger in der Folge ist
    - $s_0 \geq s_1 \geq \ldots \geq s_{n-1}$
- **Sortierkriterium**
  - Es wird immer nach einem Sortierkriterium sortiert (Sortierschlüssel)
  - Der Sortierschlüssel kann sich aus mehreren Teilen zusammensetzen
    - *z.B. Name, Vorname, Telefonnummer*
  - Je komplexer der Sortierschlüssel, desto komplexer die zum Sortieren notwendigen Vergleiche
- **Indizes**
  - Zu einer Menge von Daten können mehrere sortierte *Indizes* vorgehalten werden

Naives Sortieren

- **Algorithmus**
  - Erzeuge so lange Permutionen, bis eine entsprechend dem Kriterium sortiert ist
- **Aufwand**
  - Bester Fall: $O(n)$
    - *vorsortiert*
  - Schlechtester Fall: $O(\frac{1}{2}\, n \cdot n!) = O(n \cdot n!)$
    - *erst letzte Permutation ist sortiert*
    - *Nicht-Sortiertheit wird im Mittel nach der Hälfte der Vergleiche festgestellt*
  - Durchschnittlicher Fall: $O(\frac{1}{2}\, n \cdot n! / 2) = O(n \cdot n!)$
    - *Sortierte Folge wird nach der Hälfte der Permutationen gefunden*
    - *Nicht-Sortiertheit wird im Mittel nach der Hälfte der Vergleiche festgestellt*

```java
static void naiveSort(
  Comparable[] a)
{
  while(!sorted(a))
    Permutation.nextPerm(a);
}

static private boolean sorted(
  Comparable[] a)
{
  for(int i = 1; i < a.length;
      ++i)
    if(a[i].compareTo(a[i-1]) < 0)
      return false;
  return true;
}
```

Sortieren durch Einfügen

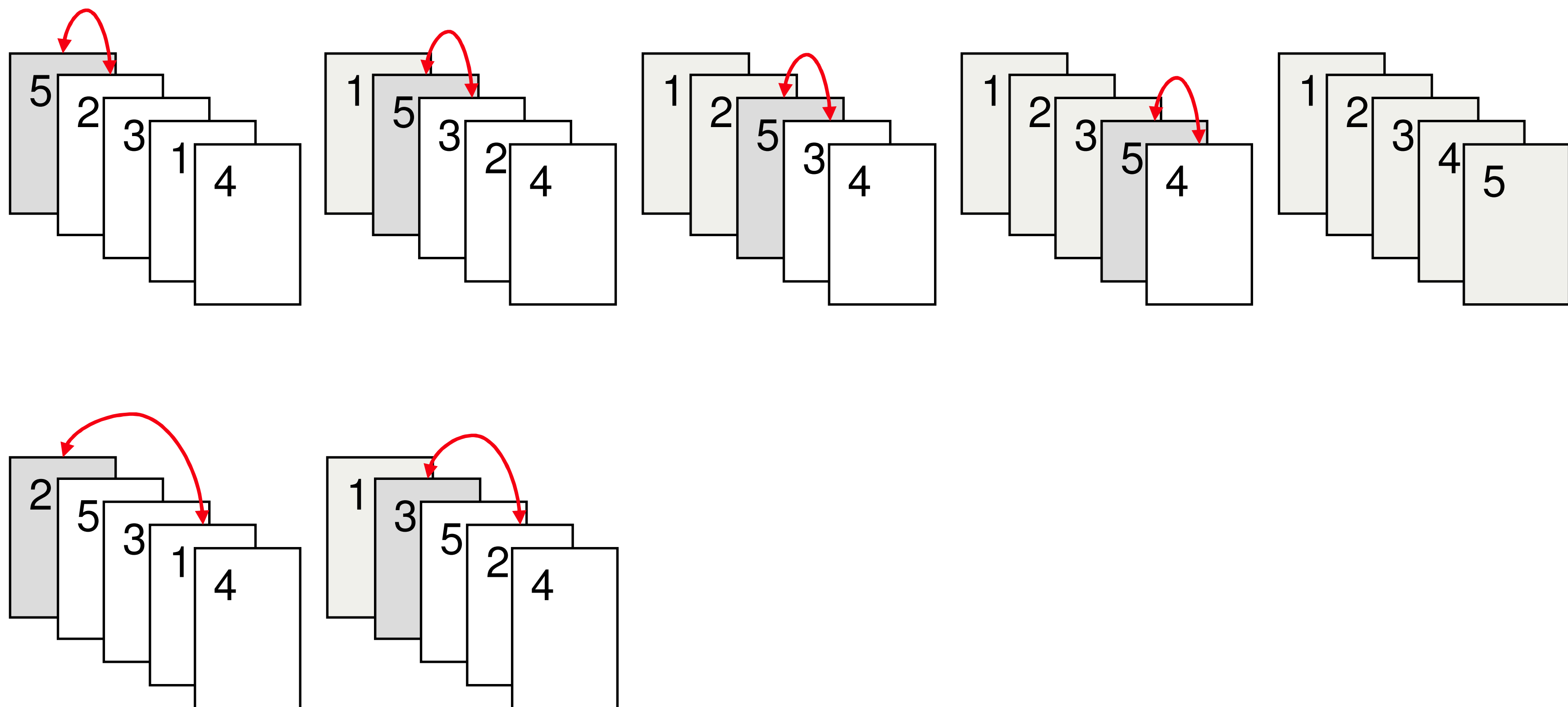


Sortieren durch Einfügen

- **Algorithmus**
  - Füge alle Elemente der Reihe nach in eine ursprünglich leere Folge sortiert ein
  - Problem bei Reihungen: Einfügen heißt, dass alle Elemente hinter der Einfügeposition verschoben werden müssen
- **Aufwand**
  - Doppelter Speicherplatzverbrauch
  - Bester Fall: $O(n)$
    - *vorsortiert*
  - Schlechtester Fall: $O(n^2)$
    - *rückwärts sortiert*
  - Durchschnittlicher Fall: $O(\frac{1}{2} n^2) = O(n^2)$
    - *Einsortieren im Mittel in der Mitte*

```
static void insertSort(Comparable[] a)
{
  Comparable[] b =
    (Comparable[]) a.clone();
  for(int i = 0; i < b.length; ++i)
  {
    int j = i;
    while(j > 0 &&
          a[j - 1].compareTo(b[i]) > 0)
    {
      a[j] = a[j - 1];
      --j;
    }
    a[j] = b[i];
  }
}
```

Sortieren durch Auswählen

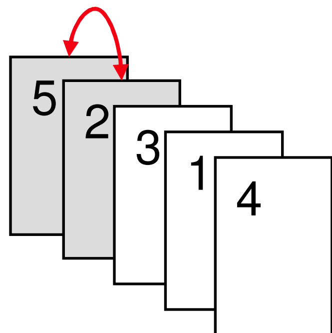


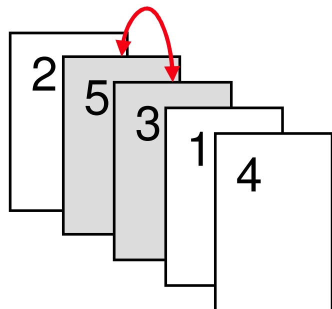
Sortieren durch Auswählen

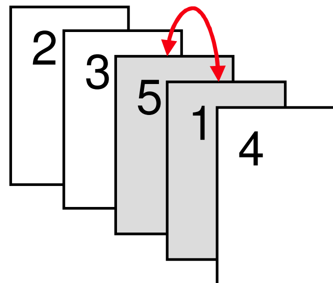
- **Algorithmus**
  - Falls nur noch ein Element übrig ist, ist die Folge sortiert.
  - Ansonsten
    - *Suche nach dem kleinsten Element und stelle es an den Anfang,*
    - *sortiere den Rest.*
- **Aufwand**
  - In jedem Durchgang wird ein Element ausgewählt
  - Um das Element auszuwählen, müssen im Mittel n/2 Elemente durchsucht werden
  - Durchschnittlicher Fall: $O(\frac{1}{2} n \cdot n) = O(\frac{1}{2} n^2) = O(n^2)$

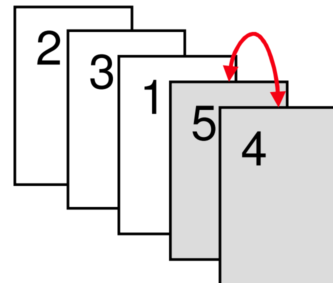
```
static void selectSort(Comparable[] a)
{
  for(int i = 0; i < a.length - 1; ++i)
    for(int j = i + 1; j < a.length; ++j)
      if(a[i].compareTo(a[j]) > 0)
        swap(a, i, j);
}

static void swap(Object[] o,
                 int a, int b)
{
  Object temp = o[a];
  o[a] = o[b];
  o[b] = temp;
}
```

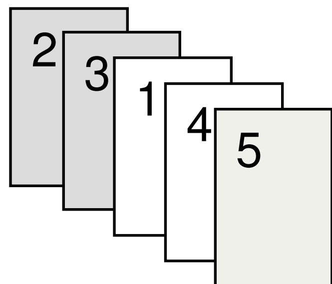
BubbleSort

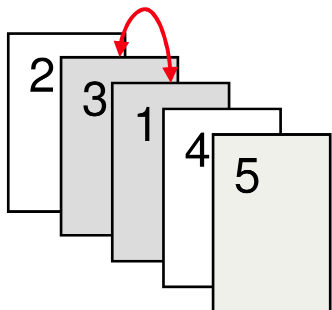


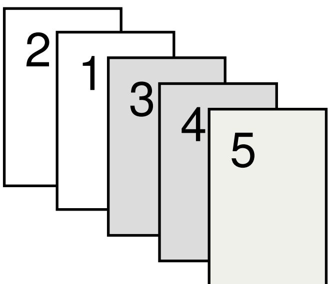


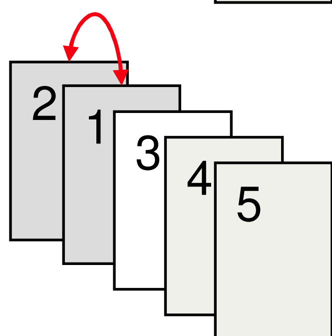


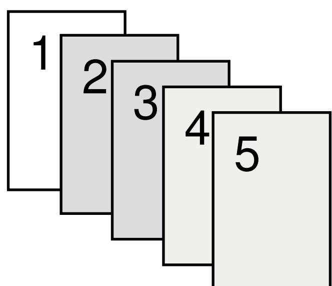


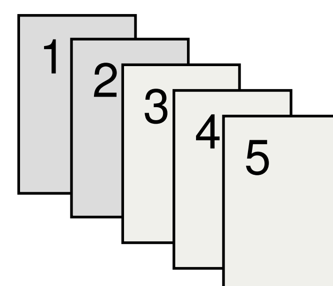










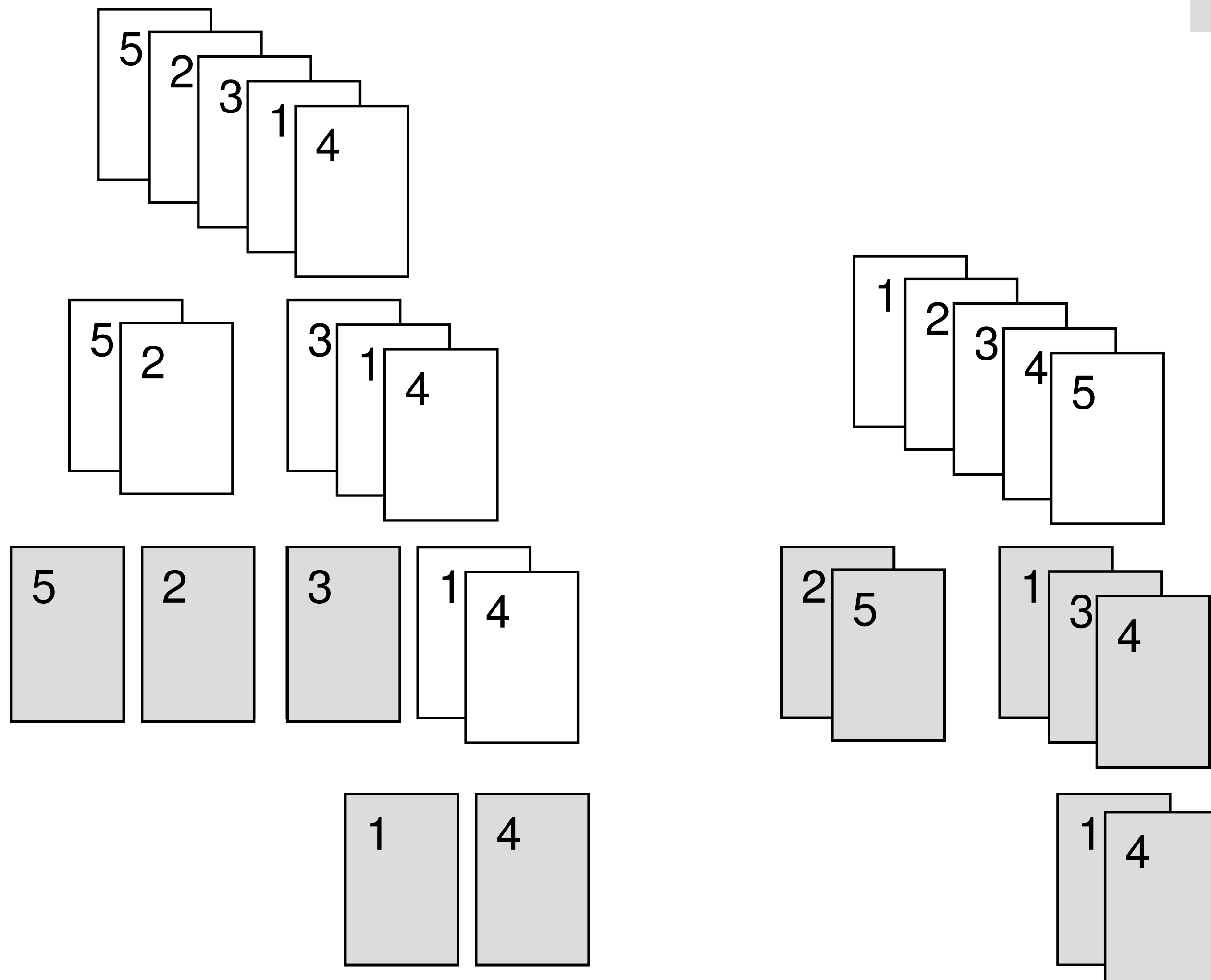


BubbleSort

- **Algorithmus**
  - Gehe der Reihe nach durch alle Elemente und vertausche zwei jeweils aufeinander folgende, wenn ihre Reihenfolge falsch ist
  - Wiederhole dies so lange, bis keine Vertauschungen mehr notwendig sind
- **Aufwand**
  - Günstigster Fall: $O(n)$
    - *vorsortiert*
  - Schlechtester Fall: $O(n^2)$
    - *rückwärts sortiert (maximale Anzahl von Vertauschungen)*
  - Durchschnittlicher Fall: $O(n^2)$
    - *im Mittel* $\frac{1}{2} n^2$ *Vertauschungen*

```
static void bubbleSort(Comparable[] a)
{
  boolean swapped;
  do
  {
    swapped = false;
    for(int j = 1; j < a.length; ++j)
      if(a[j].compareTo(a[j - 1]) < 0)
      {
        swap(a, j, j - 1);
        swapped = true;
      }
  }
  while(swapped);
}
```

Sortieren durch Mischen



Sortieren durch Mischen

- **Algorithmus**
  - Enthält die Folge kein oder nur ein Element, ist sie sortiert
  - Ansonsten
    - *Teile die Folge in zwei gleich große Hälften*
    - *Sortiere die Hälften*
    - *Mische die sortierten Hälften wieder zusammen*
- **Mischen**
  - Vergleiche die beiden ersten Elemente der Hälften
  - Entnimm das kleinere von beiden und füge es dem Ergebnis hinzu
  - Wiederhole so lange, bis beide Hälften leer sind
- **Aufwand**
  - Folge kann $\log_2(n)$ mal in Hälften zerlegt werden
  - Auf jeder Ebene der Zerlegung werden alle Elemente einmal gemischt: $O(n)$
  - Insgesamt (in jedem Fall): $O(n \log n)$
  - Platzkomplexität: $2\ n$ Elemente beim Mischen

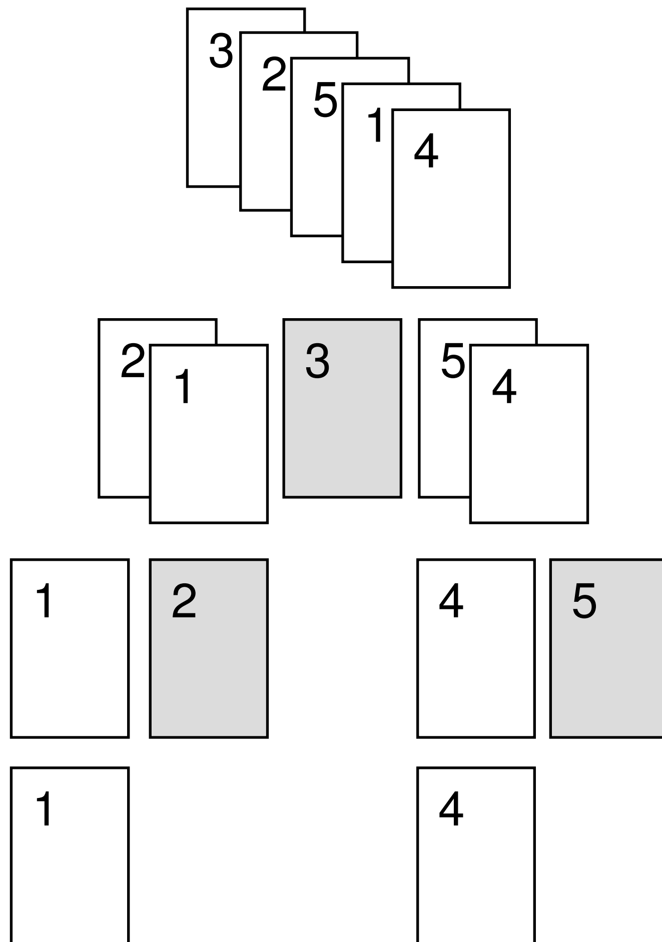
Sortieren durch Mischen

```
class Queue
{
  void push(Object) …
  Object pop() …
  Object top() …
  int length() …
}
```

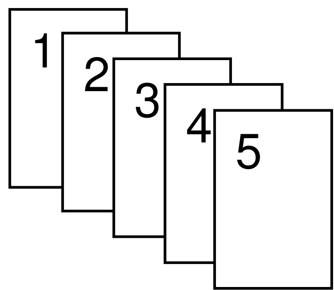
```
static Queue mergeSort(Queue q)
{
  if(q.length() > 1)
  {
    Queue q2 = new Queue();
    balance(q, q2);
    return merge(mergeSort(q),
                 mergeSort(q2));
  }
  else
    return q;
}
```

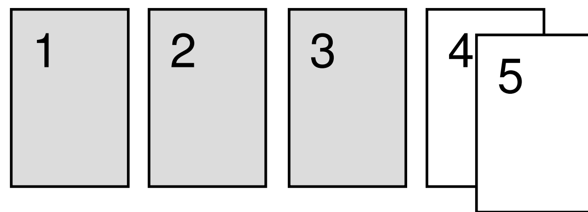
```
static private void balance(Queue q1,
                            Queue q2)
{
  while(q1.length() > q2.length())
    q2.push(q1.pop());
}

static private Queue merge(Queue q1,
                           Queue q2)
{
  Queue q = new Queue();
  while(q1.length() > 0 || q2.length() > 0)
    if(q2.length() == 0 || q1.length() > 0
       && ((Comparable) q1.top())
          .compareTo(q2.top()) < 0)
      q.push(q1.pop());
    else
      q.push(q2.pop());
  return q;
}
```

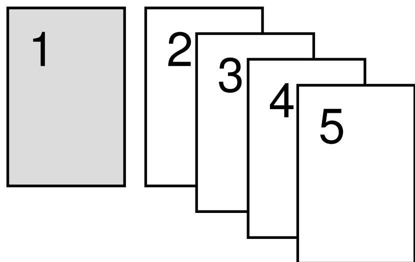
QuickSort

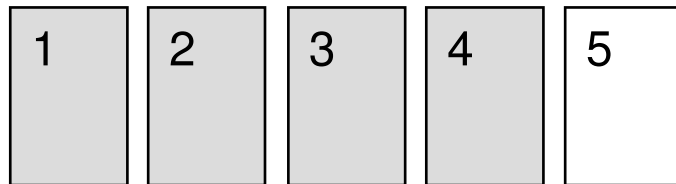


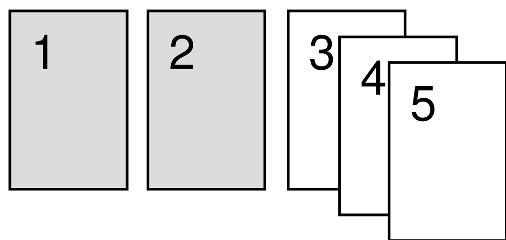
QuickSort – Ungünstige Vorsortierung

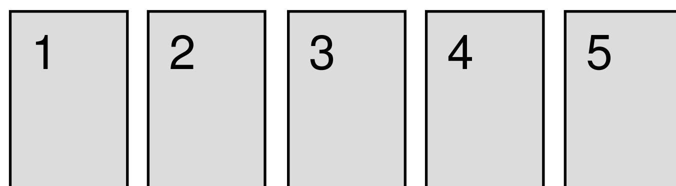












QuickSort

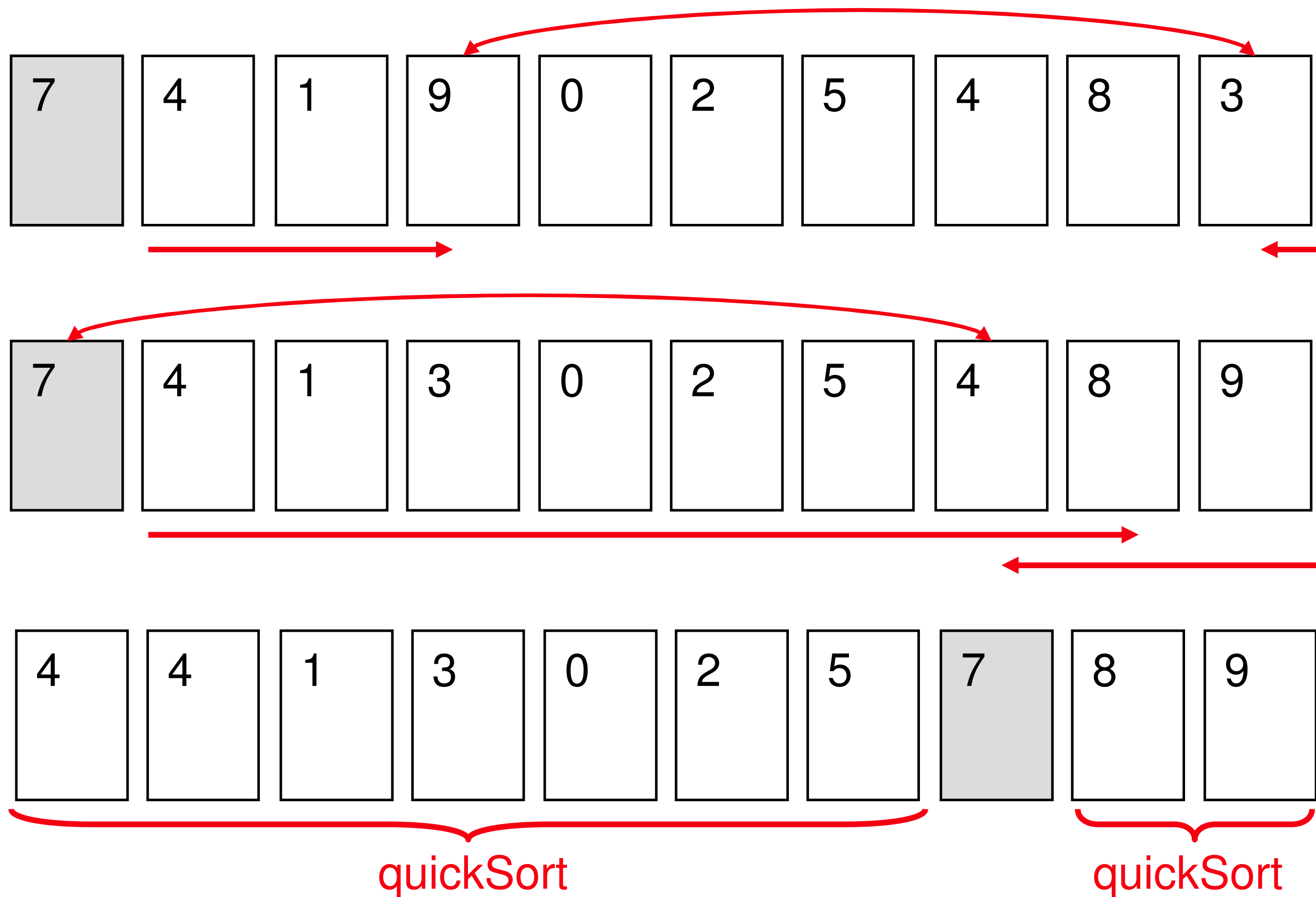
- **Algorithmus**
  - Enthält die Folge kein oder nur ein Element, ist sie sortiert
  - Ansonsten
    - *entnimm ein Element (das sog. Pivot-Element),*
    - *bilde eine neue Liste aus allen kleineren Elementen und lasse diese sortieren,*
    - *bilde eine neue Liste aus allen größeren Elementen und lasse diese sortieren,*
    - *Hänge die sortierte Liste der kleineren Elemente, das gewählte Element und die sortierte Liste der größeren Elemente aneinander und liefere diese zurück.*
- **Aufwand**
  - Günstigster Fall: $O(n \log n)$
    - *beide Teillisten sind jeweils gleich lang*
  - Schlechtester Fall: $O(n^2)$
    - *Eine der Teillisten ist immer leer*
    - *Wenn als Pivot-Element immer das erste verwendet wird, ist dies bei Vorsortierung der Fall!*
  - Durchschnittlicher Fall: $O(n \log n)$
    - *Beweis siehe Ottmann / Widmayer*
  - Kein zusätzlicher Speicherbedarf bei Sortierung eines Arrays!

QuickSort einer Warteschlange

```
static void quickSort(Queue q)
{
  if(q.length() > 0)
  {
    Comparable pivot =
      (Comparable) q.pop();
    Queue q1 = new Queue(),
          q2 = new Queue();
    split(q, pivot, q1, q2);
    quickSort(q1);
    quickSort(q2);
    join(q, pivot, q1, q2);
  }
}
```

```
static void split(Queue q, Comparable pivot,
                  Queue q1, Queue q2)
{
  while(q.length() > 0)
   if(pivot.compareTo(q.top()) > 0)
     q1.push(q.pop());
   else
     q2.push(q.pop());
}

static void join(Queue q, Object pivot,
                 Queue q1, Queue q2)
{
  while(q1.length() > 0)
    q.push(q1.pop());
  q.push(pivot);
  while(q2.length() > 0)
    q.push(q2.pop());
}
```

QuickSort mit Arrays



QuickSort

```
static void quickSort(Comparable[] a)
{
  quickSort2(a, 0, a.length);
}
```

```
static private void quickSort2(Comparable[] a, int bottom, int top)
{
  if(bottom + 1 < top)
  {
    swap(a, bottom, (top + bottom) / 2);
    Comparable pivot = a[bottom];
    int i = bottom + 1,
        j = top - 1;
    do
    {
      while(i < top && a[i].compareTo(pivot) < 0) ++i;
      while(j > bottom && a[j].compareTo(pivot) >= 0) --j;
      if(i < j)
        swap(a, i, j);
    }
    while(i < j);
    swap(a, i - 1, bottom);
    quickSort2(a, bottom, i - 1);
    quickSort2(a, i, top);
  }
}
```

Schnittstelle Comparator

- **Motivation**
  - Die Schnittstelle Comparable legt nur genau eine Ordnungsrelation für eine Klasse fest
  - Die Schnittstelle Comparator erlaubt die Definition beliebiger weiterer Ordnungsrelationen
- **Generische Schnittstellen**
  - interface Comparable<T>
  - interface Comparator<T>
    - *new Comparator<String>()*
      {
      public int compare(String a, String b)
      { return a.compareTo(b); }
      }

```
import java.util.Comparator;

static void selectSort(Object[] a,
                       Comparator c)
{
  for(int i = 0; i < a.length - 1; ++i)
    for(int j = i + 1; j < a.length; ++j)
      if(c.compare(a[i],a[j]) > 0)
        swap(a, i, j);
}

static void selectSort(String[] s)
{
  selectSort(s, new Comparator()
  {
    public int compare(Object a, Object b)
    {
      return ((String) a).compareTo(b);
    }
  });
}
```