Lutz Schröder
Till Mossakowski

Modallogik für Informatiker
Übungsblatt 1

Abgabe 23.05.06, 17:00

Übung 1:

Sei $R \subset X \times X$ eine binäre Relation. Setze

$$R^* = \bigcap \{R' \subset X \times X \mid R \subseteq R', R' \text{ reflexiv und transitiv}\}.$$

(a) Zeige, dass R^* die (bezüglich $\subseteq$) kleinste R enthaltende reflexive transitive Relation ist. (Hinweis: hierzu ist unter anderem zu zeigen, dass R^* reflexiv und transitiv ist.)

(b) Zeige

$$R^* = \{(x, y) \mid \exists n \geq 0, x_0, \dots, x_n \in X.\, x_0 = x, x_n = y, \\ \forall i = 0, \dots, n-1.\, x_i R x_{i+1}\} =: R'.$$

Hinweis: zeige zunächst, dass R' reflexiv und transitiv ist, und sodann, dass jede R enthaltende reflexive und transitive Relation auch R' enthält.

6 P.

Übung 2:

Man erinnere sich an die Axiome

$$\begin{array}{ll} (T) & p \to \Diamond p \\ (B) & p \to \Box \Diamond p. \end{array}$$

Sei $\mathfrak{F} = (W, R)$ ein Rahmen. Zeige

(a) $\mathfrak{F} \models T \iff R$ reflexiv;

(b) $\mathfrak{F} \models B \iff R$ symmetrisch.

7 P.

Übung 3:

Gib formale Herleitungen in K für die folgenden Formeln an:

$$(\Box p \land \Diamond q) \to \Diamond(p \land q)$$
$$\Diamond(p \lor q) \leftrightarrow (\Diamond p \lor \Diamond q)$$

7 P.