Darstellung ganzer Zahlen mit dem Einerkomplement

Jan Bredereke

Universität Bremen, Fachbereich Informatik Vers. 3.0

Dieser Text ergänzt das Skript „Darstellung ganzer Zahlen als Bitvektoren“ von Jan Peleska und Jan Bredereke, das zur Darstellung das Zweierkomplement benutzt.

Der letzte Teil dieses Textes wird nach erfolgreichem Vorrechnen von Blatt 1 ergänzt werden.

Definition 1 (Repräsentationsfunktion $\widehat{r}$)

$$\widehat{r} : \mathbb{Z} \to \mathbb{B}^{n+1}, \qquad \widehat{r}(z) = \begin{cases} (0 \;\; x_{n-1} \;\; \ldots \;\; x_0) & \textit{mit} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i = z & \textit{falls } 0 \leq z < 2^n \\ (\underbrace{1}_{=w_n} \;\; w_{n-1} \;\; \ldots \;\; w_0) & \textit{mit} \sum_{i=0}^{n} 2^i w_i = z + 2^{n+1} - 1 & \textit{falls } -2^n < z < 0 \end{cases}$$

mit Definitionsbereich

$$\underline{dom}\,\widehat{r} = \{z \in \mathbb{Z} \mid -2^n < z < 2^n\}$$

Außerdem sei, falls $-2^n < z < 0$,

$$w \;=_{df}\; \sum_{i=0}^{n} 2^i w_i = z + 2^{n+1} - 1$$

□

Definition 2 (Abstraktionsfunktion $\widehat{\rho}$)

$$\widehat{\rho} : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathbb{Z}, \qquad \widehat{\rho}(x_n \;\ldots\; x_0) = \begin{cases} \rho(x_n \;\ldots\; x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i & \textit{für } x_n = 0 \\ -\rho(K_1(x_n \;\ldots\; x_0)) & \textit{für } x_n = 1 \end{cases}$$

Die Abstraktionsfunktion $\widehat{\rho}$ wird auch Retrieve-Funktion genannt. □

Definition 3 (Addition $\widehat{+}$ auf $\mathbb{B}^{n+1}$)

$$\widehat{+} : \mathbb{B}^{n+1} \times \mathbb{B}^{n+1} \nrightarrow \mathbb{B}^{n+1}$$

mit Definitionsbereich

$$\underline{dom}\ \widehat{+} = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{B}^{n+1} \times \mathbb{B}^{n+1} \ \Big| \ \big(x_n \oplus y_n = 1\big) \vee \big(x_n = 0 \ \wedge \ y_n = 0 \ \wedge \ \rho_{n+2}((x_n \ \ldots \ x_0) +' (y_n \ \ldots \ y_0)) < 2^n\big) \vee \big(x_n = 1 \ \wedge \ y_n = 1 \ \wedge \ \rho((x_{n-1} \ \ldots \ x_0) +' (y_{n-1} \ \ldots \ y_0)) \geq 2^n - 1\big) \Big\}$$

und

$$(x_n \ \ldots \ x_0) \ \widehat{+} \ (y_n \ \ldots \ y_0) \ =_{df} \Pi_{n+1}\big((z_n \ \ldots \ z_0) \ +' \ (0 \ \ldots \ 0 \ z_{n+1})\big)$$

mit

$$(z_{n+1} \ z_n \ \ldots \ z_0) \ =_{df} (x_n \ \ldots \ x_0) \ +' \ (y_n \ \ldots \ y_0)$$

□

Die Addition in der Einerkomplementdarstellung erfolgt also zweistufig mithilfe der vorzeichenlosen Addition: Zuerst werden die beiden Summanden vorzeichenlos addiert, die dabei links herausfallende $(n+2)$-te Ziffer wird anschließend in einem zweiten Schritt an der niederwertigsten Stelle wieder vorzeichenlos dazuaddiert. Dieser Trick erspart viele Fallunterscheidungen, die anderenfalls notwendig wären.

Beispiel:

$$(00100) +' (00010) = (000110) \leadsto (00100) \widehat{+} (00010) = (00110) \qquad 4 + 2 = 6 \tag{1}$$
$$(00010) +' (11011) = (011101) \leadsto (00010) \widehat{+} (11011) = (11101) \qquad 2 + (-4) = -2 \tag{2}$$
$$(00100) +' (11101) = (100001) \leadsto (00100) \widehat{+} (11101) = (00010) \qquad 4 + (-2) = 2 \tag{3}$$
$$(11011) +' (11101) = (111000) \leadsto (11011) \widehat{+} (11101) = (11001) \qquad (-4) + (-2) = -6 \tag{4}$$
$$(11110) +' (00001) = (011111) \leadsto (11110) \widehat{+} (00001) = (11111) \qquad (-1) + 1 = -0 \tag{5}$$

Die zweite Form der Null kann also wirklich entstehen.

Definition 4 (Subtraktion $\widehat{-}$ auf $\mathbb{B}^{n+1}$)

$$\widehat{-} : \mathbb{B}^{n+1} \times \mathbb{B}^{n+1} \nrightarrow \mathbb{B}^{n+1}$$

mit Definitionsbereich

$$\underline{dom}\ \widehat{-} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{B}^{n+1} \times \mathbb{B}^{n+1} \ \big| \ (x, K_1(y)) \in \ \underline{dom}\ \widehat{+} \big\}$$

und

$$(x_n \ \ldots \ x_0) \ \widehat{-} \ (y_n \ \ldots \ y_0) \ =_{df} (x_n \ \ldots \ x_0) \ \widehat{+} \ K_1(y_n \ \ldots \ y_0)$$

□

Satz 1 *Das folgende Diagramm* kommutiert*:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{+} & \mathbb{Z} \\ \uparrow{\scriptstyle \widehat{\rho}\times\widehat{\rho}} & & \uparrow{\scriptstyle \widehat{\rho}} \\ \mathbb{B}^{n+1} \times \mathbb{B}^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{+}} & \mathbb{B}^{n+1} \end{array}$$

d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\forall\big((x_n \ \dots \ x_0), (y_n \ \dots \ y_0)\big) \in \ \underline{dom} \ \widehat{+} \ .$$
$$\widehat{\rho}(x_n \ \dots \ x_0) + \widehat{\rho}(y_n \ \dots \ y_0) = \widehat{\rho}((x_n \ \dots \ x_0) \ \widehat{+} \ (y_n \ \dots \ y_0))$$

□

Beweis:

Sei $x = (x_n \ \dots \ x_0)$ und $y = (y_n \ \dots \ y_0)$.

Fall $\boxed{x_n = y_n = 0}$ **und** $\rho_{n+2}((x_n \ \dots \ x_0) +' (y_n \ \dots \ y_0)) < 2^n$ **:**

(Beweis genau analog zu dem für das Zweierkomplement.)
Dann gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(x_n \ \dots \ x_0) + \widehat{\rho}(y_n \ \dots \ y_0) &= \rho(x_n \ \dots \ x_0) + \rho(y_n \ \dots \ y_0) && (6) \\ &= \rho_{n+2}((x_n \ \dots \ x_0) +' \rho(y_n \ \dots \ y_0)) && (7) \\ &= \rho((x_n \ \dots \ x_0) \,\widehat{+}\, \rho(y_n \ \dots \ y_0)) \qquad [\text{Def. } \widehat{+},\ x_n = y_n = 0] && (8) \\ &= \widehat{\rho}((x_n \ \dots \ x_0) \,\widehat{+}\, \rho(y_n \ \dots \ y_0)) && (9) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, da $x_n = y_n = 0$ und da wegen $\rho_{n+2}((x_n \ \dots \ x_0) +' (y_n \ \dots \ y_0)) < 2^n$ auch kein Übertrag in das n-te Bit entsteht.

Fall $\boxed{x_n = 1, y_n = 0}$ **:**

Dann gilt

$$\widehat{\rho}(x) + \widehat{\rho}(y) = -\rho(K_1(x)) + \rho(y) \tag{10}$$

Da $x_n = 1, y_n = 0$ und damit $z_{n+1} = u_n = x_n y_n + (x_n \oplus y_n)u_{n-1} = u_{n-1}$, gilt

$$\begin{aligned} z = x +' y &= (u_n \quad (x_n \oplus y_n \oplus u_{n-1}) \quad \dots \quad) && (11) \\ &= (u_{n-1} \quad (1 \oplus u_{n-1}) \quad (x_{n-1} \oplus y_{n-1} \oplus u_{n-2}) \quad \dots \quad) && (12) \end{aligned}$$

Fall (a) $\boxed{u_{n-1} = 0}$ **:**

Dann ist

$$z = x +' y = (\underbrace{0}_{n+1} \quad 1 \quad (x_{n-1} \oplus y_{n-1} \oplus u_{n-2}) \quad \dots \quad (x_0 \oplus y_0)) \tag{13}$$

und damit

$$\begin{aligned} x \mathbin{\widehat{+}} y &= \Pi_{n+1}(\Pi_{n+1}(z) +' (0 \ \dots \ 0\ 0)) && (14)\\ &= \Pi_{n+1}(x +' y) && (15) \end{aligned}$$

Für Fall (a) gilt also:

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(x \mathbin{\widehat{+}} y) &= \widehat{\rho}(\Pi_{n+1}(x +' y)) && (16)\\ &= -\rho(K_1(\Pi_{n+1}(x +' y))) \qquad [z_n = 1] && (17)\\ &= -\sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (1 - (x_i + y_i)) && (18)\\ &= \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (x_i + y_i - 1) && (19)\\ &= -\sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (1 - x_i) \ + \ \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot y_i && (20)\\ &= -\rho(K_1(x)) + \rho(y) && (21)\\ &= \widehat{\rho}(x) + \widehat{\rho}(y) \qquad [x_n = 1,\, y_n = 0] && (22) \end{aligned}$$

Fall (b) $\boxed{u_{n-1} = 1}$ **:**

Dann ist

$$z = x +' y = (\underbrace{1}_{n+1} \quad 0 \quad (x_{n-1} \oplus y_{n-1} \oplus u_{n-2}) \quad \dots \quad (x_0 \oplus y_0)) \tag{23}$$

Wegen $y_n = 0$ folgt

$$\rho(x) \le 2^{n+1} - 1 \ \wedge \ \rho(y) \le 2^n - 1 \tag{24}$$

und damit

$$\begin{aligned} \rho(x) + \rho(y) &\le 2^{n+1} + 2^n - 2 && (25)\\ &< 2^{n+1} + 2^n - 1 && (26)\\ &= 2^{n+2} - 2^n - 1 && (27) \end{aligned}$$

und

$$\rho(x +' y) \neq 2^{n+2} - 1 - 2^n \tag{28}$$

und deshalb

$$z = x +' y \neq (1\ 0\ 1\ 1\ \dots\ \ 1) \tag{29}$$

Es ist wegen $z_{n+1} = 1$

$$x \mathbin{\widehat{+}} y = \Pi_{n+1}(\Pi_{n+1}(z) +' (0\ \dots\ 0\ 1)) \tag{30}$$

und weil $z_n = 0$ und weil wegen $z \neq (1\ 0\ 1\ 1\ \dots\ \ 1)$ kein Additionsübertrag diese Stelle in $x \mathbin{\widehat{+}} y$ verändert, folgt damit

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}(x \mathbin{\widehat{+}} y) &= \rho(\Pi_{n+1}(\Pi_{n+1}(x +' y) +' (0\ \dots\ 0\ 1))) && (31)\\
&= \rho(\Pi_{n+1}(x +' y)) + 1 && (32)\\
&= \rho(x +' y) - 2^{n+1} + 1 \qquad [z_{n+1} = 1] && (33)\\
&= \rho(x +' y) - \sum_{i=0}^{n} 2^i && (34)\\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (x_i + y_i - 1) && (35)\\
&= -\sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (1 - x_i)\ +\ \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot y_i && (36)\\
&= -\rho(K_1(x)) + \rho(y) && (37)\\
&= \widehat{\rho}(x) + \widehat{\rho}(y) \qquad [x_n = 1,\ y_n = 0] && (38)
\end{aligned}$$

Fall $\boxed{x_n = 0, y_n = 1}$ **:**

Aus Symmetriegründen wie $x_n = 1, y_n = 0$.

Fall $\boxed{x_n = 1, y_n = 1}$ **:**

Dann ist

$$\begin{aligned}
x +' y &= (u_n \quad (x_n \oplus y_n \oplus u_{n-1}) \quad \dots \quad (x_0 \oplus y_0)) && (39)\\
&= (\underbrace{(\underbrace{x_n y_n}_{=1} + (\underbrace{x_n \oplus y_n}_{=0}) u_{n-1})}_{=1} \quad \underbrace{(\underbrace{x_n \oplus y_n}_{=0} \oplus u_{n-1})}_{=u_{n-1}} \quad \dots \quad (x_0 \oplus y_0)) && (40)\\
&= (\underbrace{1}_{n+1} \quad \underbrace{u_{n-1}}_{n} \quad (x_{n-1} \oplus y_{n-1} \oplus u_{n-2}) \quad \dots \quad (x_0 \oplus y_0)) && (41)
\end{aligned}$$

und wegen Def. <u>dom</u> $\widehat{+}$, 3. Fall gilt

$$\begin{aligned}
& z = x +' y = (1 \quad 1 \quad (x_{n-1} \oplus y_{n-1} \oplus u_{n-2}) \quad \dots \quad (x_0 \oplus y_0)) && (42)\\
\vee\ & z = x +' y = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1\ \dots\ 1) && (43)
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\rho(x) \leq 2^{n+1} - 1 \;\wedge\; \rho(y) \leq 2^{n+1} - 1 \tag{44}$$

und damit

$$\rho(x) + \rho(y) \leq 2^{n+2} - 2 \tag{45}$$
$$< 2^{n+2} - 1 \tag{46}$$

und

$$\rho(x +' y) \neq 2^{n+2} - 1 \tag{47}$$

und deshalb

$$z = x +' y \neq (1\,1\,1\,1\;\ldots\;1) \tag{48}$$

und

$$\Pi_{n+1}(z) \neq (1\,1\,1\;\ldots\;1) \tag{49}$$

Es ist wegen $z_{n+1} = 1$

$$x \mathbin{\widehat{+}} y = \Pi_{n+1}(\Pi_{n+1}(z) +' (0\;\ldots\;0\,1)) \tag{50}$$

Fall (a) $\boxed{z_n = 1}$ **:**

Weil wegen $\Pi_{n+1}(z) \neq (1\;1\;1\;\ldots\;1)$ kein Additionsübertrag auf die Stelle $n+1$ entsteht und die Stelle n auf 1 bleibt, folgt damit

$$\widehat{\rho}(x \mathbin{\widehat{+}} y) = -\rho(K_1(\Pi_{n+1}(\Pi_{n+1}(x +' y) +' (0\;\ldots\;0\,1)))) \tag{51}$$

Die innere Projektion können wir wegen der äußeren Projektion fortlassen:

$$\widehat{\rho}(x \mathbin{\widehat{+}} y) = -\rho(K_1(\Pi_{n+1}(\Pi_{n+2}((x +' y) +'_{n+2} (0\,0\;\ldots\;0\,1))))) \tag{52}$$

Die beiden Projektionen schneiden nun je eine 1 ab, so daß ihr Weglassen kompensiert werden muß:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\rho}(x \,\widehat{+}\, y) &= 2^{n+2} + 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (1 - (x_i + y_i + v_i)) \qquad \text{mit } v_0 = 1 \text{ und } v_i = 0 \text{ sonst} && (53)\\
&= 2^{n+2} + 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i x_i + \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i y_i\right) + 1 && (54)\\
&= 2^{n+2} + 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 + 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i x_i + \sum_{i=0}^{n} 2^i y_i && (55)\\
&= -2^{n+2} + 1 + 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i x_i + \sum_{i=0}^{n} 2^i y_i && (56)\\
&= -2^{n+1} + 1 + \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i x_i\right) - 2^{n+1} + 1 + \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i y_i\right) && (57)\\
&= -\sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i x_i - \sum_{i=0}^{n} 2^i + \sum_{i=0}^{n} 2^i y_i && (58)\\
&= -\sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (1 - x_i) - \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot (1 - y_i) && (59)\\
&= -\rho(K_1(x)) - \rho(K_1(y)) && (60)\\
&= \widehat{\rho}(x) + \widehat{\rho}(y) && (61)
\end{aligned}
$$

Fall (b) $\boxed{z_n = 0}$ **:**

Wegen $z = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \ \dots \ 1)$ entsteht hier bei der Addition von $(0 \ \dots \ 0 \ 1)$ auf jeden Fall ein Übertrag ind die Stelle n, ohne allerdings anschließend die Stelle $n+1$ durch einen weiteren Übertrag zu verändern, so daß hinterher wiederum die höchsten beiden Stellen gleich 1 sind. Damit gilt die gleiche Argumentation wie ab Gleichung (51) auch hier. $\square$