Übungen zur Vorlesung
Theorie reaktiver Systeme
SS 2005

AG Betriebssysteme FB3
Jan Peleska, Ulrich Hannemann

Algebraische Gesetze zu CSP-Konstrukten

Bewiesen wird die folgenden Äquivalenz (im Sinne der starken Bisimilarität) von CSP – Prozessen.

$$(P \setminus A) \setminus B \;=\; P \setminus (A \cup B)$$

Beweis[1]

Zum Beweis dieser Äquivalenz definieren wir folgende Relation

$$\varrho = \{((P \setminus A) \setminus B, P \setminus (A \cup B)) \mid P \in CSP, A, B \in \Sigma\}$$

und zeigen, dass ϱ eine starke Bisimilarität ist.

Was ist zu zeigen?
Für $(P, Q) \in \varrho$ ist zu zeigen, dass

1. für alle $e \in \alpha(P)$ gilt: Wenn $P \xrightarrow{e} P'$, dann existiert Q' mit $Q \xrightarrow{e} Q'$ und $(P', Q') \in \varrho$.
2. für alle $e \in \alpha(Q)$ gilt: Wenn $Q \xrightarrow{e} Q'$, dann existiert P' mit $P \xrightarrow{e} P'$ und $(P', Q') \in \varrho$.

Erste Beweisverpflichtung
Entsprechend der Beweisverpflichtung 1. untersuchen wir zunächst, welche Transitionen von $(P \setminus A) \setminus B$ ausgehend unter welchen Voraussetzungen möglich sind, das heisst, für ein Muster

$$((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{e} Z$$

werden Bedingungen ermittelt, die zu einer Instanz von (e, Z) führen. Dabei werden die Regeln der operationellen Semantik benutzt, relevant sind hier

(H2)

$$\frac{P \xrightarrow{\mu} P'}{P \setminus A \xrightarrow{\tau} P' \setminus A} \quad [\, \mu \in A \,]$$

(H3)

$$\frac{P \xrightarrow{\mu} P'}{P \setminus A \xrightarrow{\mu} P' \setminus A} \quad [\, \mu \notin A \,]$$

Anschliessend wird die Beweisverpflichtung 2. behandelt.

Sei also $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{e} Z$ eine Transition, so ist sie nur mittels Regel (H2) oder (H3) ermöglicht.

(A) Nehmen wir also an, diese Transition ist nach Regel (H2) ermöglicht. Dann gilt $e = \tau$, $Z = (Z' \setminus B)$ und es gibt $e' \in B$ mit $P \setminus A \xrightarrow{e'} Z'$. Dann ist diese Transition ebenfalls nur durch Anwendung von Regel (H2) oder (H3) möglich.

(A1) Nehmen wir also zusätzlich an, dass in diesem Fall ebenfalls (H2) angewendet wurde. Dann wäre $e' = \tau$. Da in der vorliegenden Literatur nicht verboten wird, dass $\tau \in B$ ist, gibt es $e'' \in A$ mit $P \xrightarrow{e''} P'$, und somit ist $Z' = P' \setminus A$.

Zusammengefasst gibt es also $e'' \in A$ mit $P \xrightarrow{e''} P'$, so dass $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{\tau} ((P' \setminus A) \setminus B)$ eine mögliche Transition ist.

[1] Fragen, Korrekturen, Hinweise auf Rechtschreibfehler und ähnliches bitte an `ulrichh@tzi.de`.

Für die rechte Seite der Bisimilaritätsrelation bedeutet dies:
$P \xrightarrow{e''} P'$ und $e'' \in (A \cup B)$, also kann Regel (H2) angewendet werden und die Transition $(P \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\tau} (P' \setminus (A \cup B))$ ist möglich. Es bleibt also zu zeigen, dass die erreichten Zustände bisimilar sind. Dies ist der Fall, da

$$((P' \setminus A) \setminus B), (P' \setminus (A \cup B)) \in \varrho$$

gilt.

(A2) Nehmen wir hingegen an, dass in diesem Fall (H3) angewendet wurde. Dann muss $P \xrightarrow{e'} P'$ möglich sein, mit $e' \notin A$. In diesem Fall ist $Z' = P' \setminus A$.

Für die rechte Seite der Bisimilaritätsrelation bedeutet dies:
$P \xrightarrow{e'} P'$ und $e' \in (A \cup B)$, also kann Regel (H2) angewendet werden und die Transition $(P \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\tau} (P' \setminus (A \cup B))$ ist möglich. Wie im Fall (A1) sind die erreichten Zustände in ϱ.

(B) Nehmen wir nun an, die Transition $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{e} Z$ ist nach Regel (H3) ermöglicht. Dann ist $e \notin B$, $Z = (Z' \setminus B)$ und es muss $P \setminus A \xrightarrow{e} Z'$ möglich sein. Diese Transition wiederum ist nur durch Anwendung von Regel (H2) oder (H3) möglich.

(B1) Nehmen wir also zusätzlich an, dass in diesem Fall (H2) angewendet wurde. Dann ist $e = \tau$ und es gibt $e' \in A$ mit $P \xrightarrow{e'} P'$, und somit ist $Z' = P' \setminus A$.

Zusammengefasst gibt es also $e' \in A$ mit $P \xrightarrow{e'} P'$, so dass $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{\tau} ((P' \setminus A) \setminus B)$ eine mögliche Transition ist.

Für die rechte Seite der Bisimilaritätsrelation bedeutet dies:
$P \xrightarrow{e'} P'$ und $e' \in (A \cup B)$, also kann Regel (H2) angewendet werden und die Transition $(P \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\tau} (P' \setminus (A \cup B))$ ist möglich. Wie im Fall (A1) sind die erreichten Zustände in ϱ.

(B2) Es bleibt also noch der Fall, dass Regel (H3) angewendet wurde. Dann ist $e \notin A$ und die Transition $P \xrightarrow{e} P'$ ist möglich, $Z' = P' \setminus A$.

Dann ist also $e \notin A$, $e \notin B$, eine Transition $P \xrightarrow{e} P'$ möglich, so dass $(P \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{e} (P' \setminus (A \cup B))$ möglich wird.

Für die rechte Seite der Bisimilaritätsrelation bedeutet dies:
Weil $P \xrightarrow{e} P'$ und $e \notin (A \cup B)$ kann nur Regel (H3) angewendet werden und die Transition $(P \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{e} (P' \setminus (A \cup B))$ ist möglich. Wie in den vorherigen Fällen gilt aber $((P' \setminus A) \setminus B), (P' \setminus (A \cup B)) \in \varrho$.

(C) Es gibt keine weiteren Möglichkeiten einer Transition $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{e} Z$.

Somit ist gezeigt, dass für alle Transitionen von $((P \setminus A) \setminus B)$ eine entsprechende Transition von $(P \setminus (A \cup B))$ existiert.

Zweite Beweisverpflichtung
Umgekehrt sei also $(P \setminus (A \cup B) \xrightarrow{e} Z$ eine Transition, sie ist nur mittels Regel (H2) oder (H3) ermöglicht.

(A) Nehmen wir also an, diese Transition ist nach Regel (H2) ermöglicht. Dann gilt $e = \tau$, und es gibt $e' \in (A \cup B)$ mit $P \xrightarrow{e'} P'$ und $Z = (P' \setminus (A \cup B)$.

Für die linke Seite der Bisimilaritätsrelation haben wir :
Möglich ist eine Transition $P \xrightarrow{e'} P'$ mit $e' \in (A \cup B)$. (A1) Sei nun $e' \in A$. Dann kann Regel (H2) angewendet werden, wir erhalten eine Transition $P \setminus A \xrightarrow{\tau} P' \setminus A$. Damit wiederum kann Regel (H3) angewendet werden und führt zu einer Transition $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{\tau} ((P' \setminus A) \setminus B)$ (Der pathologische Fall $\tau \in B$ führt zum gleichen Ergebnis mit Regel (H2)). Es bleibt festzustellen, dass $((P' \setminus A) \setminus B), (P' \setminus (A \cup B)) \in \varrho$ gilt.

(A2) Sei nun $e' \in ((A \cup B) \setminus A$, also $e' \in B$. Damit kann die Regel (H3) angewendet werden, wir erhalten eine Transition $P \setminus A \xrightarrow{e'} P' \setminus A$. Wegen $e' \in B$ muss danach Regel (H2) angewendet werden und führt zu einer Transition $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{\tau} ((P' \setminus A) \setminus B)$ wie im Fall (A1).

(B) Nehmen wir nun an, diese Transition ist nach Regel (H3) ermöglicht. Dies erfordert $e \notin (A \cup B)$ mit $P \xrightarrow{e} P'$ und $Z = (P' \setminus (A \cup B)$.

Für die linke Seite der Bisimilaritätsrelation haben wir unter diesen Voraussetzungen:
Nur Regel (H3) ist anwendbar und führt zu $P \ \setminus \ A \xrightarrow{e} P' \setminus A$. Erneut ist wegen $e \notin (A \cup B)$ nur Regel (H3) anwendbar und führt zu $((P \setminus A) \setminus B) \xrightarrow{e} ((P' \setminus A) \setminus B)$. Es gilt $(((P' \setminus A) \setminus B), (P' \setminus (A \cup B))) \in \varrho$.

(C) Es gibt keine weiteren Möglichkeiten einer Transition $(P \setminus (A \cup B) \xrightarrow{e} Z$.

Somit ist gezeigt, dass für alle Transitionen von $(P \setminus (A \cup B))$ eine entsprechende Transition von $((P \setminus A) \setminus B)$ existiert.

Damit ist ϱ eine starke Bisimulation, und wegen $\varrho \subseteq \sim$ folgt $(P \setminus A) \setminus B \ = \ P \setminus (A \cup B)$. $\square$