

Übungsblatt 1

Abgabe: 14.11.2007

Aufgabe 1:

(60%)

Wir betrachten zwei Verbände (M_1, \sqsubseteq_1) und (M_2, \sqsubseteq_2) . Zwischen diesen Verbänden bilden die Abbildungen $\triangleright : M_1 \rightarrow M_2$ und $\triangleleft : M_2 \rightarrow M_1$ eine Galois Verbindung. Es gilt also:

$$\forall m_1 \in M_1, m_2 \in M_2 : m_1^\triangleright \sqsubseteq_2 m_2 \Leftrightarrow m_1 \sqsubseteq_1 m_2^\triangleleft$$

Seien $p, p_1, p_2 \in M_1$ und $q, q_1, q_2 \in M_2$ beliebige Elemente der jeweiligen Menge M_1 bzw. M_2 .

Zeigt, dass gilt:

1. $p \sqsubseteq_1 p^{\triangleright\triangleleft}$
2. $q^{\triangleleft\triangleright} \sqsubseteq_2 q$
3. $p_1 \sqsubseteq_1 p_2 \Rightarrow p_1^\triangleright \sqsubseteq_2 p_2^\triangleright$
4. $q_1 \sqsubseteq_2 q_2 \Rightarrow q_1^\triangleleft \sqsubseteq_1 q_2^\triangleleft$
5. $p^\triangleright = p^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$
6. $q^\triangleleft = q^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}$

Aufgabe 2:

(20%)

Gegeben seien zwei neue Verbände (M_1, \sqsubseteq_1) und (M_2, \sqsubseteq_2) sowie zwei neue Abbildungen $\triangleright : M_1 \rightarrow M_2$ und $\triangleleft : M_2 \rightarrow M_1$, für die die Bedingungen (1) – (4) aus der letzten Aufgabe immer erfüllt sind. Zeigt, dass hierdurch $(\triangleright, \triangleleft)$ bereits als Galois Zusammenhang charakterisiert ist.

Aufgabe 3:

(20%)

Sei $L = (M, \sqsubseteq)$ ein Verband, und seien $a, b \in M$ Elemente aus diesem Verband. Zeigt, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $a \sqsubseteq b$
2. $a \sqcup b = b$
3. $a \sqcap b = a$