Hinweise zum Tutorium

Termin: 9.1.2008

Betrachte Location

$c =_{def}$ **if**$(b(x_1,\ldots,x_n))\{P_1\}$**else**$\{P_2\}$

Teil 1: Regel in $\mathbf{P}(Loc \times \Sigma)$

Zu zeigen:

$$\frac{A \subseteq \Sigma \wedge \forall \sigma \in A : \forall i \in \{1,\ldots,n\} : \sigma(x_i) \neq ?}{\begin{array}{c}\{(c,\sigma) \mid \sigma \in A\} \longrightarrow_{\mathbf{P}} \\ \{(P_1,\sigma) \mid \sigma \in A \wedge b(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n))\} \cup \\ \{(P_2,\sigma) \mid \sigma \in A \wedge \neg b(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n))\}\end{array}}$$

Beweis:

Sei $A \subseteq \Sigma$ und $\forall \sigma \in A : \forall i \in \{1,\ldots,n\} : \sigma(x_i) \neq ?$.

Eine Menge $S = \{(c,\sigma) \mid \sigma \in A\}$ kann so dargestellt werden, dass gilt:

$$\begin{array}{l} S = \{(c,\sigma_1),\ldots,(c,\sigma_p),(c,\sigma_{p+1}),\ldots,(c,\sigma_m)\} \\ m \in \mathbb{N}, m = \#S \\ p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq m \\ \forall j \in \{1,\ldots,p\} : b(\sigma_j(x_1),\ldots,\sigma_j(x_n)) \\ \forall j \in \{p+1,\ldots,m\} : \neg b(\sigma_j(x_1),\ldots,\sigma_j(x_n)) \end{array}$$

Es wird nun konstruiert:

$$\begin{array}{l} \forall j \in \{1,\ldots,p\} : c'_j = P_1 \\ \forall j \in \{p+1,\ldots,m\} : c'_j = P_2 \\ \forall j \in \{1,\ldots,m\} : c_j = c \\ \forall j \in \{1,\ldots,m\} : \sigma'_j = \sigma_j \end{array}$$

Es gilt nun:

$$\forall j \in \{1,\ldots,m\} : (c_j,\sigma_j) \longrightarrow (c'_j,\sigma'_j)$$

Beweis:

- Fall 1: $1 \leq j \leq p$
  Nach Annahme gilt: $\forall i \in \{1,\ldots,n\} : \sigma_j(x_i) \neq ?$
  Desweiteren gilt nach Konstruktion: $b(\sigma_j(x_1),\ldots,\sigma_j(x_n))$
  Durch Anwendung der Regel **IF1**

$$\frac{\forall i \in \{1,\ldots,n\} : \sigma(x_i) \neq ? \wedge b(\sigma_j(x_1),\ldots,\sigma_j(x_n))}{(\mathbf{if}(b(x_1,\ldots,x_n))\{P_1\}\mathbf{else}\{P_2\},\sigma) \longrightarrow (P_1,\sigma)}$$

ergibt sich:

$$(c, \sigma_j) \longrightarrow (P_1, \sigma_j)$$

und nach Konstruktion von c_j, c'_j und σ'_j gerade

$$(c_j, \sigma_j) \longrightarrow (c', \sigma'_j)$$

- Fall 2: $p < j \leq m$
  Nach Annahme gilt: $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sigma_j(x_i) \neq ?$
  Desweiteren gilt nach Konstruktion: $\neg b(\sigma_j(x_1), \dots, \sigma_j(x_n))$
  Durch Anwendung der Regel **IF2**

  $$\frac{\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(x_i) \neq ? \wedge \neg b(\sigma_j(x_1), \dots, \sigma_j(x_n))}{(\mathbf{if}(b(x_1, \dots, x_n))\{P_1\}\mathbf{else}\{P_2\}, \sigma) \longrightarrow (P_2, \sigma)}$$

  ergibt sich:

  $$(c, \sigma_j) \longrightarrow (P_2, \sigma_j)$$

  und nach Konstruktion von c_j, c'_j und σ'_j gerade

  $$(c_j, \sigma_j) \longrightarrow (c', \sigma'_j)$$

Sei $I = \{1, \dots, m\}$ nun die in der Regel **P1**

$$\frac{\forall i \in I, (c_i, \sigma_i), (c'_i, \sigma'_i) \in Loc \times \Sigma : (c_i, \sigma_i) \longrightarrow (c'_i, \sigma'_i)}{\{(c_i, \sigma_i) \mid i \in I\} \longrightarrow_{\mathbf{P}} \{(c'_i, \sigma'_i) \mid i \in I\}}$$

anzuwendende Indexmenge. Wie gesehen ist ihre Bedingung erfüllt, und es muss gelten:

$$\{(c_i, \sigma_i) \mid i \in I\} \longrightarrow_{\mathbf{P}} \{(c'_i, \sigma'_i) \mid i \in I\}$$

Nach Konstruktion ist gerade

$$\begin{aligned} & \{(c_i, \sigma_i) \mid i \in I\} \\ = & \{(c, \sigma_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \\ = & S \\ = & \{(c, \sigma) \mid \sigma \in A\} \end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} & \{(c'_i, \sigma'_i) \mid i \in I\} \\ = & \{(c'_i, \sigma'_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \\ = & \{(c'_i, \sigma'_i) \mid i \in \{1, \dots, p\}\} \cup \{(c'_i, \sigma'_i) \mid i \in \{p+1, \dots, m\}\} \\ = & \{(P_1, \sigma_i) \mid i \in \{1, \dots, p\}\} \cup \{(P_2, \sigma_i) \mid i \in \{p+1, \dots, m\}\} \\ = & \{(P_1, \sigma) \mid \sigma \in A \wedge b(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)\} \cup \\ & \{(P_2, \sigma) \mid \sigma \in A \wedge \neg b(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)\} \end{aligned}$$

Also gilt schließlich:

$$\begin{gathered} \{(c, \sigma) \mid \sigma \in A\} \longrightarrow_{\mathbf{P}} \\ \{(P_1, \sigma) \mid \sigma \in A \wedge b(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)\} \cup \\ \{(P_2, \sigma) \mid \sigma \in A \wedge \neg b(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)\} \end{gathered}$$

Teil 2: Regel in $\mathbf{P}(Loc \times \Sigma_L)$

Zu zeigen:

$$\frac{B \subseteq \Sigma_L \wedge \forall \delta \in B : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(x_i) \neq ?}{\begin{array}{c}\{(c, \delta) \mid \delta \in B\} \longrightarrow_L \\ \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\ (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\ \cup \\ \{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\ (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}\end{array}}$$

Beweis:

Sei $B \subseteq \Sigma_L$ mit $\forall \delta \in B : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(x_i) \neq ?$. Sei desweiteren:

$$Q = \{(c, \delta) \mid \delta \in B\}$$

Um Konstruktionsregel

$$\frac{Q^{\lhd} \longrightarrow_{\mathbf{P}} R'}{Q \longrightarrow_L R'^{\rhd}}$$

anwenden zu können muss nun zunächst $Q^{\lhd}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} & Q^{\lhd} \\ & = \{(c, \delta) \mid \delta \in B\}^{\lhd} \\ & = \{(c, \sigma) \mid \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta \wedge \\ & \qquad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd})\} \end{aligned}$$

Da für jedes Element von $Q^{\lhd}$ wie gesehen $\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd}$ und nach Annahme auch $\forall \delta \in B : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \delta(x_i) \neq ?$ gilt, folgt auch für jedes Element von $Q^{\lhd}$, dass $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(x_i) \neq ?$ gilt. $Q^{\lhd}$ hat also nach oben bewiesener Regel für $\longrightarrow_{\mathbf{P}}$ einen Folgezustand R', so dass gilt:

$$\begin{aligned} & Q^{\lhd} \longrightarrow_{\mathbf{P}} R' \\ & R' = R'_1 \cup R'_2 \\ & R'_1 = \{(P_1, \sigma) \mid \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta \wedge \\ & \qquad\qquad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd}) \wedge \\ & \qquad\qquad b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\ & R'_2 = \{(P_2, \sigma) \mid \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta \wedge \\ & \qquad\qquad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd}) \wedge \\ & \qquad\qquad \neg b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \end{aligned}$$

Nach Konstruktionsregel gilt nun:

$$\begin{aligned} & Q \longrightarrow_L R'^{\rhd} \\ \Leftrightarrow\ & Q \longrightarrow_L (R'_1 \cup R'_2)^{\rhd} \\ \Leftrightarrow\ & Q \longrightarrow_L R_1'^{\rhd} \cup R_2'^{\rhd} \end{aligned}$$

Es wird nun zunächst ${R'_1}^{\triangleright}$ betrachtet:

$$
\begin{aligned}
&{R'_1}^{\triangleright} = \{(P_1, \delta) \mid \exists \sigma \in \Sigma : (P_1, \sigma) \in R'_1 \wedge \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta(x))\} \\
&= \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \\
&\qquad (P_1, \sigma) \in \{(P_1, \sigma) \mid \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft})\wedge \\
&\qquad\quad b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}\wedge \\
&\quad \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x))\} \\
&= \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft})\wedge \\
&\quad b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \wedge \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x))\} \\
&= \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft})\wedge \\
&\quad b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) \wedge (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x))\} \\
&= \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta'\wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}
\end{aligned}
$$

Analog ergibt sich für ${R'_2}^{\triangleright}$:

$$
\begin{aligned}
&{R'_2}^{\triangleright} = \{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta'\wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich aus den Annahmen also wie gewünscht:

$$
\begin{gathered}
\{(c, \delta) \mid \delta \in B\} \longrightarrow_L \\
\{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta'\wedge \\
(\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\
\cup \\
\{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \exists \delta \in B : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta'\wedge \\
(\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}
\end{gathered}
$$

Teil 3: Regel für $Loc \not\to \Sigma_L$

Zu zeigen:

$$\frac{(\forall i \in \{1,\dots,n\} : \delta(x_i) \neq ?) \wedge b_L(\delta(x_1),\dots,\delta(x_n)) = \top}{\begin{array}{c}\{c \mapsto \delta\} \longrightarrow_{L_2} \\ \{P_1 \mapsto \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge b_L(\delta'(x_1),\dots,\delta'(x_n)) = \mathbf{true}\}, \\ P_2 \mapsto \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge b_L(\delta'(x_1),\dots,\delta'(x_n)) = \mathbf{false}\}\}\end{array}}$$

Beweis:

Sei $\delta \in \Sigma_L$ mit $\forall i \in \{1,\dots,n\} : \delta(x_i) \neq ?$ und $b_L(\delta(x_1),\dots,\delta(x_n)) = \top$

Sei desweiteren $\lambda = \{c \mapsto \delta\}$

Um Konstruktionsregel

$$\frac{\lambda^{\triangleleft} \longrightarrow_L Q'}{\lambda \longrightarrow_{L_2} Q'^{\triangleright}}$$

anwenden zu können muss nun zunächst $\lambda^{\triangleleft}$ berechnet werden:

$$\lambda^{\triangleleft} = \{(c, \delta)\}$$

Durch Wahl von $B = \{\delta\}$ gilt nun $\forall \delta \in B : \forall i \in \{1,\dots,n\} : \delta(x_i) \neq ?$, und es darf die oben bewiesene Regel zur Konstruktion des Folgezustands Q' mit $\lambda^{\triangleleft} \longrightarrow_L Q'$ verwendet werden:

$$\begin{array}{l} Q' = \\ \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge \\ \quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\} \\ \cup \\ \{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge \\ \quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\} \end{array}$$

Nach Konstruktionsregel gilt nun $\lambda \longrightarrow_{L_2} Q'^{\triangleright}$, also:

$$\begin{array}{l} \lambda \longrightarrow_{L_2} \\ (\{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge \\ \quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\} \\ \cup \\ \{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge \\ \quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\})^{\triangleright} \end{array}$$

Da sich die zwei zu vereinigenden Mengen in ihren ersten Komponenten (Locations) nicht überschneiden, darf obiger Term umformuliert werden zu:

$$\begin{array}{l} \lambda \longrightarrow_{L_2} \\ \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge \\ \quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\}^{\triangleright} \\ \cup \\ \{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\,\sigma = \mathbf{dom}\,\delta = \mathbf{dom}\,\delta' \wedge \\ \quad (\forall x \in \mathbf{dom}\,\sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\triangleleft} \wedge \{\sigma(x)\}^{\triangleright} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))\}^{\triangleright} \end{array}$$

Es wird nun zunächst der erste Teil dieser Vereinigung betrachtet. Sei:

$$\begin{aligned}\lambda_1' = \{(P_1, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\ (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}^{\rhd}\end{aligned}$$

Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{dom}\, \lambda_1' = \{P_1\} \\
&\lambda_1'(P_1) = \bigsqcup\{\delta' \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\
&= \bigsqcup\{\delta' \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\
&= \bigsqcup\{\delta' \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\}^{\rhd} \subseteq \delta(x) \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\
&= \bigsqcup\{\delta' \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \delta : \delta'(x) \subseteq \delta(x)) \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\
&= \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\
&\quad (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\} \\
&= \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge b_L(\delta'(x_1), \ldots, \delta'(x_n)) = \mathbf{true}\}
\end{aligned}$$

Analog für den zweiten Teil der Vereinigung. Sei:

$$\begin{aligned}\lambda_2' = \{(P_2, \delta') \mid \exists \sigma \in \Sigma : \mathbf{dom}\, \sigma = \mathbf{dom}\, \delta = \mathbf{dom}\, \delta' \wedge \\ (\forall x \in \mathbf{dom}\, \sigma : \{\sigma(x)\} \subseteq \delta(x)^{\lhd} \wedge \{\sigma(x)\}^{\rhd} = \delta'(x)) \wedge \neg b(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))\}^{\rhd}\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{dom}\, \lambda_2' = \{P_2\} \\
&\lambda_2'(P_2) = \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge b_L(\delta'(x_1), \ldots, \delta'(x_n)) = \mathbf{false}\}
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich schließlich wie gewünscht:

$$\begin{gathered}
\{c \mapsto \delta\} \longrightarrow_L \\
\{P_1 \mapsto \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge b_L(\delta'(x_1), \ldots, \delta'(x_n)) = \mathbf{true}\}, \\
P_2 \mapsto \bigsqcup\{\delta' \mid \delta' \sqsubseteq \delta \wedge b_L(\delta'(x_1), \ldots, \delta'(x_n)) = \mathbf{false}\}\}
\end{gathered}$$