Theorie reaktiver Systeme

Traces

Traceäquivalenz

Korrigierte Fassung 21.11.2007

Traces

$TRACE = (\Sigma \cup \{\checkmark\})^*$
Zu einem Prozess P ist $trace(P) \subseteq TRACE$ die Menge der möglichen (Teil-)Folgen sichtbarere Events dieses Prozesses.

Für alle Prozesse P gilt:
$trace(P) \neq \emptyset$
$trace(P)$ ist präfix-abgeschlossen, $s^\frown t \in trace(P) \Rightarrow s \in trace(P)$.

- $\mathit{trace}(\mathrm{STOP}) = \{\langle\rangle\}$
- $\mathit{trace}(\mathrm{SKIP}) = \{\langle\rangle, \langle\checkmark\rangle\}$
- $\mathit{trace}(a \rightarrow P) = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle a\rangle^\frown s \mid s \in \mathit{trace}(P)\}$
- $\mathit{trace}(x : A \rightarrow P) = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle a\rangle^\frown s \mid a \in A \wedge s \in \mathit{trace}(P(a))\}$
- $\mathit{trace}(P_1 \,\Box\, P_2) = \mathit{trace}(P_1) \cup \mathit{trace}(P_2)$
- $\mathit{trace}(P_1 \sqcap P_2) = \mathit{trace}(P_1) \cup \mathit{trace}(P_2)$

- $\mathit{trace}(P_1 \underset{\Sigma}{\|} P_2) = \mathit{trace}(P_1) \cap \mathit{trace}(P_2)$

Sei $\alpha(P_1) \cap \alpha(P_2) \subseteq A$.

- $\mathit{trace}(P_1 \underset{A}{\|} P_2) = \{tr \in (\alpha(P_1) \cup \alpha(P_2) \cup \{\checkmark\})^* \mid tr\restriction_{\alpha(P_1)} \in \mathit{trace}(P_1) \wedge tr\restriction_{\alpha(P_2)} \in \mathit{trace}(P_2)\}$

Allgemein:

- $\mathit{trace}(P_1 \underset{A}{\|} P_2) = \{tr \in \mathit{TRACE} \mid \exists\, tr_1, tr_2 . tr_1 \in \mathit{trace}(P_1) \wedge tr_2 \in \mathit{trace}(P_2) \wedge tr \ \mathbf{synch}_A\ tr_1, tr_2\}$

Dabei ist die Relation tr $\mathbf{synch}_A\, tr_1, tr_2$ wie folgt definiert:

$\langle\rangle$ $\mathbf{synch}_A\, tr_1, tr_2 \Leftrightarrow tr_1 = tr_2 = \langle\rangle$

$\langle\checkmark\rangle$ $\mathbf{synch}_A\, tr_1, tr_2 \Leftrightarrow tr_1 = tr_2 = \langle\checkmark\rangle$

Sei $\langle a\rangle^\frown tr \neq \langle\checkmark\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle a\rangle^\frown tr\ \mathbf{synch}_A\, tr_1, tr_2 \Leftrightarrow\ & (a \in A \wedge head(tr_1) = head(tr_2) = a \\
& \qquad\qquad \wedge\ tr\ \mathbf{synch}_A\, tail(tr_1), tail(tr_2)) \\
& \vee (a \notin A \wedge \\
& \quad (head(tr_1) = a \wedge tr\ \mathbf{synch}_A\, tail(tr_1), tr_2) \\
& \quad \vee (head(tr_2) = a \wedge tr\ \mathbf{synch}_A\, tr_1, tail(tr_2)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\rangle \mathbin{|||} tr & = & tr \\
tr \mathbin{|||} \langle\rangle & = & tr \\
\langle a\rangle^\frown tr_1 \mathbin{|||} \langle b\rangle^\frown tr_2 & = & \{\langle a\rangle^\frown tr \mid tr \in tr_1 \mathbin{|||} \langle b\rangle^\frown tr_2\} \cup \\
 & & \{\langle b\rangle^\frown tr \mid tr \in \langle a\rangle^\frown tr_1 \mathbin{|||} tr_2\}
\end{array}
$$

- $trace(P_1 \mathbin{|||} P_2) = \bigcup\{tr_1 \mathbin{|||} tr2 \mid tr_1 \in trace(P_1) \wedge tr_2 \in trace(P_2)\}$

- $trace(P \setminus A) \quad = trace(P)\restriction_{\Sigma \setminus A} = \{tr\restriction_{\Sigma \setminus A} \mid tr \in trace(P)\}$
- $trace(P_1;\ P_2) \quad = (trace(P_1) \cap \Sigma^*) \cup$

$$\{s^\frown t \mid s^\frown \langle \checkmark \rangle \in trace(P_1) \wedge t \in trace(P_2)\}$$

Einfache Rekursion:

$N = F(N)$

Gesucht: Fixpunkt für F.

- $trace(N = F(N)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} trace(F^n(\mathrm{STOP}))$

Allgemein: $\underline{N} = \underline{F}(\underline{N})$

- $trace(\underline{N}_i = \underline{F}(\underline{N})) = \bigcup trace(\underline{F}^n(\underline{\mathrm{STOP}}))_i$

Traceäquivalenz

$P \sim_{Tr} Q \Leftrightarrow trace(P) = trace(Q)$

$P \sim_{Tr} Q$ ist Äquivalenzrelation.

$P \sim_{BS} Q \Rightarrow P \sim_{Tr} Q$

Aber: $P \sim_{Tr} Q \not\Rightarrow P \sim_{BS} Q$

Bemerkung:

Hat F einen eindeutigen Fixpunkt, so folgt aus $P = F(P)$ und

$N \sim_{Tr} F(N)$ auch $P \sim_{Tr} N$.

F hat einen eindeutigen Fixpunkt, wenn N *guarded* ist.

Der Prozessbezeichner N ist (*event*) *guarded* in P falls
1. N kommt nicht in P vor, oder
2. a) P enthält keinen Hiding-Operator und
b) Jedes Vorkommen von N ist entweder nach einem Präfix-Operator oder im zweiten Argument einer sequentiellen Komposition, deren erstes Argument nicht "sofort" terminiert.