Z – Beispiel Nr. 2

Hans–Jürgen Ficker, Sönke Jarré, Klaus Lüttich, Raymond Scholz

Universität Bremen, November 26, 1998

1 Relationen

Um Beziehungen zwischen Mengen verschiedenen Typs notieren zu können benötigt man Relationen. Mit ihrer Hilfe schafft man es einzelne Elemente aus einer Grundmenge mit denen aus einer Wertemenge zu verknüpfen.

Auch diesen Abschnitt wollen wir an Hand eines kleinen Beispieles zur besseren Verständlichkeit behandeln. Es wird sich hoffentlich niemand an der Tatsache stören, daß nicht sämtliche Namen aus dem Projekt live! erwähnt werden. Dies geschah einzig zur besseren Übersicht; alle vorhandene Namen wurden unter notarieller Aufsicht gezogen.

Aus Gründen der Konvention werden wieder alle Mengen mit einem Großbuchstaben beginnen, alle Elemente von Mengen mit einem Kleinbuchstaben.

$$[Student, Lehrende]$$

$$klaus, matthias, harald, soenke, hugo : Student$$
$$jan, bettina : Lehrende$$

1.1 Die Relation als neue Menge

Die einzuführende Relation heißt *wuv* (wird_unterrichtet_von). Nun ist klar, daß eine Beziehung von der Menge Student zu der Menge Lehrende besteht. Um diese auszudrücken gibt es zwei äquivalente Methoden:

$$wuv : \mathbb{P}(Student \times Lehrende)$$

Hier wird das Cartesische Produkt benutzt. *wuv* ist wiederum eine Menge, genauer eine Untermenge aller aus der Beziehung von Student zu Lehrenden entstehenden Mengen. Außer der Festlegung des Typs der Menge geschieht an dieser Stelle also nichts.

$$wuv2 : Student \leftrightarrow Lehrende$$

Durch Hilfe des Relationssymboles wird derselbe Sachverhalt dargestellt, allerdings etwas übersichtlicher und somit ist dies auch die gebräuchlichere Schreibweise.

Der Name ist an dieser Stelle nur unterschiedlich, da man eine Relation nicht zweimal deklarieren kann.

1.2 Notation von Elementen

Elemente der eben aufgestellten Menge wuv sind geordnete Paare, deren erster Teil vom Typ Student und deren zweiter Teil vom Typ Lehrende ist.

Die Notation eines solchen Elementes geschieht am besten mit Hilfe eines Maplet. So wird der hier auftauchende Pfeil genannt:

$$klaus \mapsto jan$$

Um nun Elemente in in die Menge einzufügen, geschieht dies in diesem Fall am Besten per Definition durch Aufzählung (das letzte Element wird erst später benötigt und erhält erst dort seinen Sinn — der Leser mag sich an dieser Stelle nicht daran stören):

$$\begin{aligned} wuv = \{&klaus \mapsto jan, klaus \mapsto bettina,\\ &matthias \mapsto jan, matthias \mapsto bettina,\\ &harald \mapsto jan, harald \mapsto bettina,\\ &soenke \mapsto jan, soenke \mapsto bettina,\\ &hugo \mapsto jan\} \end{aligned}$$

1.3 Terminologien

Um eine **wahre Aussage** der Form "'klaus wird von jan unterrichtet"' zu treffen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Sowohl

$$klaus \mapsto jan \in wuv$$

$$klaus\ wuv\ jan$$

drücken denselben gewünschten Sachverhalt aus.

Der **Domain** einer Relation, also der Teil der Grundmenge, in der alle ersten Elemente eines geordneten Paares liegen, ermittelt sich aus:

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\ wuv\\ &\quad = \{x : Student \mid (\exists\, y : Lehrende \bullet x \mapsto y \in wuv)\} \end{aligned}$$

Der **Range** einer Relation, also der Teil der Wertemenge, in der alle zweiten Elemente eines geordneten Paares liegen, wird dargestellt mit:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ran}\ wuv\\ &\quad = \{y : Lehrende \mid (\exists\, x : Student \bullet x \mapsto y \in wuv)\} \end{aligned}$$

Das **Inverse** einer Relation, also die Menge der geordneten Paare die man erhält, wenn man alle geordneten Paare der Relation umdreht, wird beschrieben durch:

$$wuv^{\sim} = \{x : Student;\ y : Lehrende \mid x \mapsto y \in wuv \bullet y \mapsto x\}$$

Des weiteren gibt es noch die **Identität**, die jedes Element einer Menge mit sich selber verknüpft. Dies ist also die Möglichkeit aus einer Menge eine Relation zu erstellen.

$$\mathrm{id}\, Student = \{x : Student \bullet x \mapsto x\}$$

1.4 Verknüpfungen (composition) von Relationen

Gibt es nun zwei verschiedene Relationen, bei denen der Domain der einen Relation dem Range der anderen Relation entspricht, so kann man sie miteinander verknüpfen (**forward composition**).

Zuerst jedoch müssen wir eine entsprechende Relation in unser Beispiel einführen:

$$Raum : \mathbb{P}\,\mathbb{N}$$

$$in\_Raum : Lehrende \leftrightarrow Raum$$

$$in\_Raum = \{jan \mapsto 5210, bettina \mapsto 5300\}$$

$$\begin{aligned} &wuv \mathbin{;} in\_Raum \\ &\quad = \{x : Student;\ z : Raum \mid (\exists\, y : Lehrende \bullet \\ &\qquad (x \mapsto y \in wuv \land y \mapsto z \in in\_Raum)) \bullet x \mapsto z\} \end{aligned}$$

Dies Letzte war die forward composition gleich mit ihrer formalen Erklärung.

Jetzt lassen sich weitere Aussagen aufstellen, wie:

$$klaus\ wuv \mathbin{;} in\_Raum\ 5210$$

Da aus der Definition ersichtlich ist, daß *klaus wuv jan* und *jan in_Raum 5210* jeweils wahre Aussagen sind, ist damit *jan* das benötigte y aus der Definition.

Die **backward composition** ist gleichbedeutend mit der forward composition, allerdings ist die Notation genau andersrum, man erhält aber dieselbe Menge.

$$\begin{aligned} &in\_Raum \circ wuv \\ &\quad = wuv \mathbin{;} in\_Raum \\ &\quad = \{x : Student;\ y : Lehrende;\ z : Raum \mid \\ &\qquad (x \mapsto y \in wuv) \land (y \mapsto z \in in\_Raum) \bullet x \mapsto z\} \end{aligned}$$

Hierbei ist die letzte Zeile noch eine zweite äquivalente Definition zur forward composition.

1.5 Domain und Range restriction und subtraction

Nun kommt es des Öfteren vor, daß man nicht immer sämtliche geordneten Paare einer Menge betrachten möchte, sondern nur spezielle Paare. Diese gehören meist einer weiteren Menge an oder eben nicht an, ansonsten gäbe es keinen Grund sie von den anderen geordneten Paaren zu unterscheiden.

Zuerst definieren wir:

$$\begin{aligned} &Z\_Gruppe : \mathbb{P}\,Student \\ &Prof : \mathbb{P}\,Lehrende \end{aligned}$$

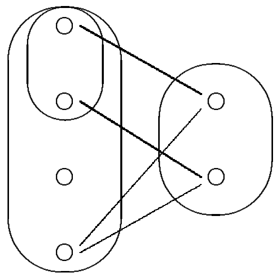
$$Z\_Gruppe = \{klaus, soenke\}$$

$$Prof = \{jan\}$$

In den folgenden Unterabschnitten wird immer zuerst das neue Symbol und anschließend einige mögliche formale Definitionen angegeben.

1.5.1 domain restriction

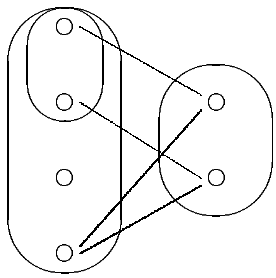
Wir versuchen nun diejenigen der geordneten Paare aus *wuv* zu bestimmen, deren erstes Element aus der Z_Gruppe stammt (in unserem Fall also *klaus* $\mapsto$ *jan, sönke* $\mapsto$ *jan, klaus* $\mapsto$ *bettina, sönke* $\mapsto$ *bettina*).



$$\begin{aligned} & Z\_Gruppe \lhd wuv \\ & \quad = \{z : Z\_Gruppe;\ l : Lehrende \mid \\ & \qquad z \mapsto l \in wuv \bullet z \mapsto l\} \\ & \quad = (Z\_Gruppe \times Lehrende) \cap wuv \end{aligned}$$

1.5.2 domain subtraction

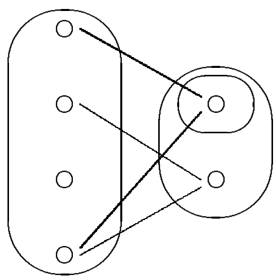
Hierbei geht es darum diejenigen der geordneten Paare zu bestimmen, deren erster Teil nicht Element einer bestimmten anderen Menge ist. (*matthias* $\mapsto$ *jan, harald* $\mapsto$ *jan, matthias* $\mapsto$ *bettina, harald* $\mapsto$ *bettina*)



$$\begin{aligned} & Z\_Gruppe \mathbin{⩤} wuv \\ & \quad = \{s : Student;\ l : Lehrende \mid \\ & \qquad s \notin Z\_Gruppe \land s \mapsto l \in wuv \bullet s \mapsto l\} \\ & \quad = wuv \setminus (Z\_Gruppe \times Lehrende) \end{aligned}$$

1.5.3 range restriction

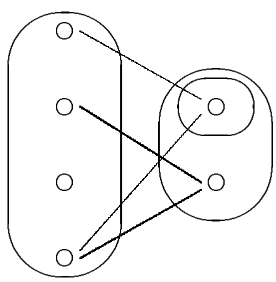
Man kann entsprechend dasselbe auch mit dem Range vollführen. Also alle geordneten Paare bestimmen, deren zweiter Teil Element einer bestimmten Menge ist: (*klaus* $\mapsto$ *jan, sönke* $\mapsto$ *jan, matthias* $\mapsto$ *jan, harald* $\mapsto$ *jan)*



$$\begin{aligned} & wuv \rhd Prof \\ & \quad = \{s : Student;\ p : Prof \mid \\ & \qquad\qquad s \mapsto p \in wuv \bullet s \mapsto p\} \\ & \quad = (Student \times Prof) \cap wuv \end{aligned}$$

1.5.4 range subtraction

Desselbe mit denjenigen der geordneten Paare, deren zweiter Teil nicht Element einer bestimmten Menge ist: (*klaus* $\mapsto$ *bettina, sönke* $\mapsto$ *bettina, matthias* $\mapsto$ *bettina, harald* $\mapsto$ *bettina*)



$$\begin{aligned} & wuv \mathbin{⩥} Prof \\ & \quad = \{s : Student;\ l : Lehrende \mid \\ & \qquad\qquad l \notin Prof \land s \mapsto l \in wuv \bullet s \mapsto l\} \\ & \quad = wuv \setminus (Student \times Prof) \end{aligned}$$

1.6 Relational image

Für das Image einer Relation (wuv) betrachtet man die geordneten Paare, deren erster Teil Element einer bestimmten Menge (Z_Gruppe) aus der Grundmenge ($Student$) ist. Sämtliche zweiten Teile dieser geordneten Paare aus der Wertemenge ($Lehrende$) sind die gesuchte Menge. Dies könnte man also als Zielmenge einer Relation aus einer bestimmten Menge beschreiben.

$$
\begin{aligned}
& wuv(\!|\ Z\_Gruppe\ |\!) \\
& \quad = \operatorname{ran}(Z\_Gruppe \lhd wuv) \\
& \quad = \{x : Student;\ y : Lehrende \mid x \in Z\_Gruppe \land x \mapsto y \in wuv \bullet y\}
\end{aligned}
$$

1.7 overwriting

Das Überlagern vorhandener Relationen ist eine häufig angewandte Technik und soll daher hier kurz angeführt werden.

Mit ihrer Hilfe kann man geordnete Paare zu einer vorhandenen Relation hinzufügen und dabei vorhandene Paare löschen/überlagern. Es wird die bestehende Relation jedoch nicht verändert.

In unserem Beispiel tritt der Fall ein, daß $hugo$ der Stoff bei jan zu anstrengend ist und er es statt dessen es lieber immer von einem Kommilitonen $lars$ erklärt bekommt (auch wenn es dadurch nicht unbedingt leichter wird). Somit wird $lars$ in den Kreis der Lehrenden aufgenommen und es resultiret:

$$
\begin{array}{|l}
lars : Lehrende \\
unterrichtet : Student \leftrightarrow Lehrende
\end{array}
$$

$$unterrichtet = \{hugo \mapsto lars\}$$

eine neue Relation die genau denselben Typ wie wuv besitzt. Nun werden die geordneten Paare aus wuv, die als ersten Teil $hugo$ besitzen, in der Relation nicht weiter beachtet ($hugo \mapsto jan$). Gleich mit neuem Symbol und kurzer Erklärung dieses Symbols:

$$
\begin{aligned}
& wuv \oplus unterrichtet \\
& \quad = unterrichtet \cup ((\operatorname{dom} unterrichtet) \mathbin{⩤} wuv) \\
& \quad = \{klaus \mapsto jan, klaus \mapsto bettina, \\
& \qquad matthias \mapsto jan, matthias \mapsto bettina, \\
& \qquad harald \mapsto jan, harald \mapsto bettina, \\
& \qquad soenke \mapsto jan, soenke \mapsto bettina, \\
& \qquad hugo \mapsto lars\}
\end{aligned}
$$

Zu beachten: wuv hat sich nicht verändert und besitzt immer noch dieselben Elemente wie bisher.

2 Funktionen

Eine spezielle Abart der Relation ist die Funktion. Bei der Relation war eine beliebige Verknüpfung zwischen zwei (evt. verschiedenen) Mengen möglich. Die Funktionen schränken die Art der Verknüpfung erheblich ein. Man sollte sie jedoch trotzdem verwenden, da man durch sie verschiedene Sachverhalte wesentlich besser verdeutlichen kann.

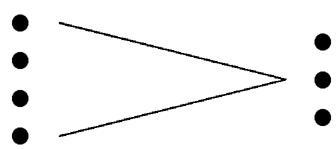
Man würde z.B. niemals auf den Gedanken kommen — wenn man die Menge Kinder und die Menge Väter hat — einem Kind mehr als einen Vater zuzuordnen (Gentechnik und heutige Familienverhältnisse ausser Acht gelassen, wir beziehen uns auf den biologischen Vater)

Im Folgenden bezeichnen A, B Mengen und f eine Funktion.

$$[A, B]$$

2.1 partielle Funktion

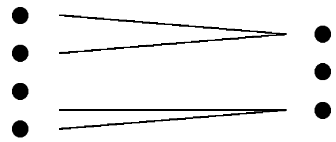
Die allgemeinste Form der Funktion. Jedem Element der Grundmenge wird höchstens ein Element der Wertemenge zugeordnet. Anders gesprochen: In der Menge aller geordneten Paare taucht jedes Element der Grundmenge als erster Teil des geordneten Paares höchstens einmal auf.



$$\begin{aligned} A \pfun B = \{ f : A \rel B \mid (\forall\, x : A;\ y_1, y_2 : B \bullet \\ ((x \mapsto y_1) \in f \land (x \mapsto y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2) \} \end{aligned}$$

2.2 Totale Funktion

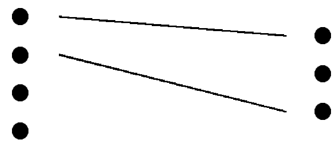
Eine Funktion, deren Domain der Grundmenge entspricht ist eine totale Funktion.
Somit ist die totale Funktion eine echte Untermenge der partiellen Funktion.



$$A \fun B = \{ f : A \pfun B \mid \operatorname{dom} f = A \}$$

2.3 Injektion

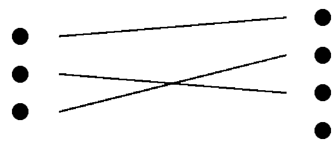
Hingegen ist eine Funktion, bei der alle Elemente der Wertemenge höchstens einmal im Range auftauchen eine Injektion. Dies bedeutet, daß die Umkehrabbildung auch eine Funktion sein muß.
Wird dabei jedem Element der Grundmenge höchstens ein Element der Wertemenge zugeordnet, so heißt die Funktion partielle Injektion.



$$\begin{aligned} A \pinj B = \{ f : A \pfun B \mid (\forall\, x_1, x_2 : \operatorname{dom} f \bullet \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \} \end{aligned}$$

$$= \{ F : A \pfun B \mid f^{\sim} \in B \pfun A \}$$

Ist hingegen der Domain gleich der Grundmenge, so heißt sie totale Injektion.

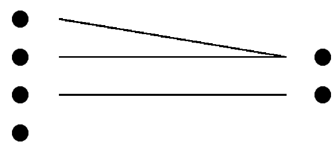


$$\begin{aligned} A \rightarrowtail B &= \{f : A ⤔ B \mid \operatorname{dom} f = A\} \\ &= (A ⤔ B) \cap (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

2.4 Surjektion

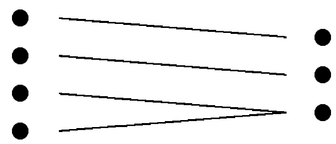
Bei einer Surjektion entspricht der Range der Funktion der Wertemenge. Also jedes Element der Wertemenge taucht in den geordneten Paaren der Funktion mindestens einmal auf.

Partielle Surjektion bedeutet, daß zusätzlich zur Surjektion jedes Element der Grundmenge höchstens ein Element der Wertemenge zugeordnet wird.



$$A ⤀ B = \{f : A ⇸ B \mid \operatorname{ran} f = B\}$$

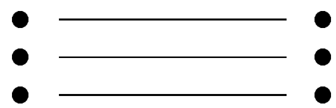
Totale Surjektion heißt, daß zusätzlich zur Surjektion der Domain der Grundmenge entspricht.



$$A \twoheadrightarrow B = (A ⤀ B) \cap (A \rightarrow B)$$

2.5 Bijektive Funktion

Ist eine Funktion sowohl surjektiv als auch injektiv, so nennt man sie bijektiv. Jedem Element der Grundmenge werden durch die Funktion genau ein Element der Wertemenge zugeordnet, beide Mengen sind gleich groß.



$$A ⤖ B = (A \twoheadrightarrow B) \cap (A \rightarrowtail B)$$

2.6 Finite partielle Funktion

Ist der Domain einer partiellen Funktion eine endliche Menge (der Grundbereich kann weiterhin unendlich sein), so nennt man diese auch eine finite partielle Funktion.

$$A ⇻ B = \{f : A ⇸ B \mid \operatorname{dom} f \in \mathbb{F}\, A\}$$

2.7 Finite partielle Injektion

Ist eine Funktion eine finite partielle Funktion und zusätzlich noch eine Injektion (alle Elemente der Wertemenge tauchen im Range höchstens einmal auf), so ist sie eine finite partielle Injektion.

$$A ⤕ B = (A ⇻ B) \cap (A ⤔ B)$$