



Universität  
Bremen

***Vorhersage der Bewegung eines Balls  
mittels hybrider Kalman Filter Varianten***

**Master-Thesis**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Master of Science (M. Sc.)**

im Studiengang  
**Systems Engineering (M. Sc.)**  
an der  
**Universität Bremen**

vorgelegt von

**Tom Spalek**

Matrikelnummer: 6346711

am  
18.10.2025

geprüft von  
**Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Udo Frese**  
und  
**Zweitprüferin: Dr. rer. nat. Lisa Gutzeit**



## Offizielle Erklärungen

Auf den folgenden Seiten sind die durch die Universität Bremen vorgegebenen, offiziellen Erklärungen zur Erstellung von Abschlussarbeiten zu finden. Es liegen vor:

- Eigenständigkeitserklärung
- Erklärung zur Veröffentlichung von Bachelor- und Masterarbeiten
- Einverständniserklärung über die Bereitstellung und Nutzung der Bachelorarbeit / Masterarbeit in elektronischer Form zur Überprüfung durch eine Plagiatssoftware.



Universität  
Bremen

### Hinweise zu den offiziellen Erklärungen

1. Die folgende Seite mit den offiziellen Erklärungen

- A) Eigenständigkeitserklärung
- B) Erklärung zur Veröffentlichung von Bachelor- oder Masterarbeiten
- C) Einverständniserklärung über die Bereitstellung und Nutzung der Bachelorarbeit / Masterarbeit in elektronischer Form zur Überprüfung durch eine Plagiatssoftware

ist entweder direkt in jedes Exemplar der Bachelor- oder Masterarbeit fest mit einzubinden oder unverändert im Wortlaut in jedes Exemplar der Bachelor- oder Masterarbeit zu übernehmen.

**Bitte achten Sie darauf, jede Erklärung in allen drei Exemplaren der Arbeit zu unterschreiben.**

2. In der digitalen Fassung kann auf die Unterschrift verzichtet werden. Die Angaben und Entscheidungen müssen jedoch enthalten sein.

#### Zu B)

Die Einwilligung kann jederzeit durch Erklärung gegenüber der Universität Bremen, mit Wirkung für die Zukunft, widerrufen werden.

#### Zu C)

Das Einverständnis der dauerhaften Speicherung des Textes ist freiwillig.

Die Einwilligung kann jederzeit durch Erklärung gegenüber der Universität Bremen, mit Wirkung für die Zukunft, widerrufen werden.

Weitere Informationen zur Überprüfung von schriftlichen Arbeiten durch die Plagiatssoftware sind im Nutzungs- und Datenschutzkonzept enthalten. Diese finden Sie auf der Internetseite der Universität Bremen.

---

### Notes on the official declarations

1. The following pages with the official declarations

- A) Declaration of Authorship
- B) Declaration on the Publication of Bachelor's or Master's Thesis
- C) Declaration of Consent for the Provision and Use of the Bachelor's Thesis / Master's Thesis in Electronic Form for Review by Plagiarism Software

is to be either integrated directly into each copy of the bachelor's or master's thesis or adopted unchanged in the wording of each copy of the bachelor's or master's thesis.

**Please be sure to sign each declaration in all three copies of the thesis.**

2. The signature can be omitted from the digital version. However, the information and decisions must be included.

#### Regarding B)

The consent can be revoked at any time with future effect by notifying the University of Bremen.

#### Regarding C)

Consent for the permanent storage of the text is voluntary. The consent can be revoked at any time with future effect by notifying the University of Bremen.

Further information on the checking of written work using plagiarism software can be found in the data protection and usage concept. This can be found on the University of Bremen website.

Universität  
Bremen**Eigenständigkeits- und Einverständniserklärung zur Überprüfung mit Plagiatssoftware  
sowie die Erklärung zur Veröffentlichung bei Bachelor- und Masterarbeiten****Declarations of Authorship and Consent for Checking with Plagiarism Software and the  
Declaration of Publication for Bachelor's and Master's Thesis**

Studierenden-Angaben / Student Information:

Matrikelnr. / Student ID	<u>6346711</u>
Nachname / Surname	<u>Spalek</u>
Vorname / First Name	<u>Tom</u>

Titel der Arbeit / Title of Thesis

**Vorhersage der Bewegung eines Balls mittels hybrider Kalman Filter Varianten****A) Eigenständigkeitserklärung / Declaration of Authorship**

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Teile meiner Arbeit, die wortwörtlich oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Gleiches gilt auch für Zeichnungen, Skizzen, bildliche Darstellungen sowie für Quellen aus dem Internet, dazu zählen auch KI-basierte Anwendungen oder Werkzeuge. Die Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Prüfungsleistung eingereicht.

I hereby affirm that I have written the present work independently and have used no sources or aids other than those indicated. All parts of my work that have been taken from other works, either verbatim or in terms of meaning, have been marked as such, indicating the source. The same applies to drawings, sketches, pictorial representations and sources from the Internet, including AI-based applications or tools. The work has not yet been submitted in the same or a similar form as a final examination paper.

- Ich habe KI-basierte Anwendungen und/oder Werkzeuge genutzt und diese im Anhang "Nutzung KI basierte Anwendungen" dokumentiert.

I have used AI-based applications and/or tools and documented them in the appendix "Use of AI-based applications".

**B) Erklärung zur Veröffentlichung von Bachelor- oder Masterarbeiten**  
Declaration regarding the publication of bachelor's or master's thesis

Die Abschlussarbeit wird zwei Jahre nach Studienabschluss dem Archiv der Universität Bremen zur dauerhaften Archivierung angeboten. Archiviert werden:

Two years after graduation, the thesis is offered to the archive of the University of Bremen for permanent archiving. The following are archived:

- 1) Masterarbeiten mit lokalem oder regionalem Bezug sowie pro Studienfach und Studienjahr 10 % aller Masterarbeiten  
Master's theses with a local or regional focus, as well as per subject and academic year 10% of all Master's thesis
- 2) Bachelorarbeiten des jeweils ersten und letzten Bachelorabschlusses pro Studienfach und Jahr.  
Bachelor's thesis for the first and last bachelor's degrees per subject and year.

- Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.  
I agree that my thesis may be viewed by third parties in the university archive for academic purposes.
- Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit nach 30 Jahren (gem. §7 Abs. 2 BremArchivG) im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.  
I agree that my thesis may be viewed by third parties for academic purposes in the university archive after 30 years (in accordance with §7 para. 2 BremArchivG).
- Ich bin **nicht** damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.  
I do not consent to my thesis being made available in the university archive for third parties to view for academic purposes.

**C) Einverständniserklärung zur elektronischen Überprüfung der Arbeit auf Plagiate  
Declaration of consent for electronic checking of the work for plagiarism**

Eingereichte Arbeiten können nach § 18 des Allgemeinen Teil der Bachelor- bzw. der Masterprüfungsordnungen der Universität Bremen mit qualifizierter Software auf Plagiatsvorwürfe untersucht werden.

Zum Zweck der Überprüfung auf Plagiate erfolgt das Hochladen auf den Server der von der Universität Bremen aktuell genutzten Plagiatssoftware.

Submitted papers can be checked for plagiarism using qualified software in accordance with § 18 of the General Section of the Bachelor's or Master's Degree Examination Regulations of the University of Bremen. For the purpose of checking for plagiarism, the upload to the server is done using the plagiarism software currently used by the University of Bremen.

- Ich bin damit einverstanden, dass die von mir vorgelegte und verfasste Arbeit zum oben genannten Zweck dauerhaft auf dem externen Server der aktuell von der Universität Bremen genutzten Plagiatssoftware, in einer institutionseigenen Bibliothek (Zugriff nur durch die Universität Bremen), gespeichert wird.

I agree that the work I have submitted and written will be stored permanently on the external server of the plagiarism software currently used by the University of Bremen, in a library belonging to the institution (accessed only by the University of Bremen), for the above-mentioned purpose.

- Ich bin **nicht** damit einverstanden, dass die von mir vorgelegte und verfasste Arbeit zum o.g. Zweck dauerhaft auf dem externen Server der aktuell von der Universität Bremen genutzten Plagiatssoftware, in einer institutionseigenen Bibliothek (Zugriff nur durch die Universität Bremen), gespeichert wird.

I do not consent to the work I submitted and wrote being permanently stored on the external server of the plagiarism software currently used by the University of Bremen, in a library belonging to the institution (accessed only by the University of Bremen), for the above-mentioned purpose.

Das Einverständnis der dauerhaften Speicherung des Textes ist freiwillig. Die Einwilligung kann jederzeit durch Erklärung gegenüber der Universität Bremen, mit Wirkung für die Zukunft, widerrufen werden. Weitere Informationen zur Überprüfung von schriftlichen Arbeiten durch die Plagiatsoftware sind im Nutzungs- und Datenschutzkonzept enthalten. Diese finden Sie auf der Internetseite der Universität Bremen.

Consent to the permanent storage of the text is voluntary. Consent can be withdrawn at any time by making a declaration to this effect to the University of Bremen, with effect for the future. Further information on the checking of written work using plagiarism software can be found in the data protection and usage concept. This can be found on the University of Bremen website.

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich die obenstehenden Erklärungen gelesen und verstanden habe und bestätige die Richtigkeit der gemachten Angaben.

With my signature, I confirm that I have read and understood the above explanations and confirm the accuracy of the information provided.

Datum / Date

Unterschrift/ Signature



## Kurzfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Untersuchung eines Kalman Filters basierend auf dem Unscented Kalman Filters (UKF) zur Zustandsschätzung von hybriden, dynamischen Systemen. Solche Systeme zeichnen sich durch stetige und unstetige Zustandsänderungen aus, wie sie beispielsweise bei der Bewegung eines Balls mit Aufprall am Boden auftreten.

Hierfür wird ein Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten entwickelt, bei dem die Sigmoidpunkte nicht wie üblich in jedem Zeitschritt neu generiert, sondern über die gesamte Laufzeit beibehalten und aktualisiert werden. Dies soll präzise und konsistente Zustandsschätzungen auch in der Nähe von Dynamikgrenzen und bei Modusübergängen ermöglichen, ohne auf die Vorteile der einfachen Modellierung und Implementierung sowie die guten Eigenschaften zur Programmlaufzeit zu verzichten, die der UKF mit sich bringt.

Zur Validierung des Ansatzes werden zwei Simulationsszenarien modelliert und implementiert: Ein eindimensionales Szenario mit elastischem Aufprall zum anschaulichen Verständnis der hybriden Kalman Filter Varianten und ein realitätsnahes dreidimensionales Szenario. Der entwickelte Filter wird mit bestehenden Varianten verglichen – dem UKF, dem Salted Kalman Filter (SKF) und dem Hybriden Unscented Kalman Filter (HUKF).

Die Auswertung zeigt, dass der UKF mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten gute Ergebnisse für die Zustandsschätzung liefert, die vergleichbar mit dem SKF und dem HUKF sind. Der UKF mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten bringt dabei einen deutlich geringeren Modellierungsaufwand als der des SKF und bessere Eigenschaften zur Programmlaufzeit als der HUKF mit sich. Außerdem zeichnet sich der UKF mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten dadurch aus, dass die Unsicherheit der Schätzung die realen, physikalischen Gegebenheiten am plausibelsten abbildet.



# Inhaltsverzeichnis

1	Einführung.....	1
1.1	Motivation .....	1
1.2	Ziel der Arbeit.....	1
1.3	Gliederung der Arbeit .....	2
2	Stand der Technik.....	3
2.1	Kalman Filter.....	3
2.2	Hybride, dynamische Systeme.....	5
2.3	Salted Kalman Filter.....	6
2.4	Hybrider Unscented Kalman Filter.....	8
2.5	Ballphysik.....	9
2.5.1	Beschleunigung.....	10
2.5.2	Aufprall.....	10
2.6	Kameramodell.....	11
3	Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmapunkten .....	13
3.1	Motivation und Idee.....	13
3.2	Dynamik.....	13
3.3	Messung .....	15
4	Szenario 1D .....	17
4.1	Simulationsumgebung.....	17
4.2	Modellierung des Systems .....	18
4.3	Kalman Filter Varianten .....	19
4.3.1	Unscented Kalman Filter .....	19
4.3.2	Salted Kalman Filter .....	19
4.3.3	Hybrider Unscented Kalman Filter.....	20
4.3.4	Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmapunkten .....	20
5	Szenario 3D .....	21
5.1	Simulationsumgebung.....	21
5.2	Modellierung des Systems .....	21
5.3	Kalman Filter Varianten .....	22
5.3.1	Unscented Kalman Filter .....	22
5.3.2	Salted Kalman Filter .....	23
5.3.3	Hybrider Unscented Kalman Filter.....	29

---

5.3.4	Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmapunkten .....	29
5.4	Beispielhafter Simulationsdurchgang .....	29
6	Auswertung .....	31
6.1	Szenario 1D .....	31
6.1.1	Quantitative Auswertung .....	31
6.1.2	Qualitative Auswertung .....	33
6.1.2.1	Position .....	33
6.1.2.2	Geschwindigkeit .....	38
6.1.2.3	Konsistenz .....	43
6.2	Szenario 3D .....	47
6.2.1	Quantitative Auswertung .....	47
6.2.2	Qualitative Auswertung .....	49
6.2.2.1	Position .....	49
6.2.2.2	Geschwindigkeit .....	54
6.2.2.3	Konsistenz .....	59
6.2.2.4	Konsistenzproblem des HUKF-SPG .....	62
6.2.2.5	Kritisches Problem des UKF .....	62
6.3	Schlussfolgerung .....	64
6.4	Ausblick .....	64
7	Zusammenfassung .....	66
	Literaturverzeichnis .....	67
	Abbildungsverzeichnis .....	68
	Anhang A: Datenträger .....	70
	Anhang B: Nutzung KI basierte Anwendungen .....	71

# 1 Einführung

In diesem Abschnitt werden die Motivation für das Thema, das Ziel sowie der Beitrag und eine Gliederung dieser Arbeit dargelegt.

## 1.1 Motivation

Die präzise Zustandsschätzung und Vorhersage von Objektbewegungen im dreidimensionalen Raum spielen in zahlreichen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle. Besonders in Bereichen wie Robotik, Computer Vision, Regelungstechnik und autonomen Systemen ist es entscheidend, den Zustand eines Objekts präzise zu schätzen und ggf. die Trajektorie zuverlässig vorherzusagen, um darauf basierende Entscheidungen treffen zu können. Durch die immer weiter ansteigende Vielzahl an Anwendungen steigen auch die Anforderungen an die Systeme zur Zustandsschätzung. Zwar existieren bereits erprobte Standardverfahren für die Zustandsschätzung linearer und nichtlinearer Systeme, jedoch steigt der Bedarf an zuverlässigen und effizienten Algorithmen zur Zustandsschätzung für hybride, dynamische Systeme. Die Besonderheit bei diesen Systemen ist, dass diese in verschiedenen Modi agieren können, in denen verschiedene Modelle zur Anwendung kommen können. Wechselt ein System von einem Modus in den anderen, treten Unstetigkeiten in den Modellen auf, die in der Theorie vieler Algorithmen für die Zustandsschätzung nicht berücksichtigt sind. Dies gilt auch für den Kalman Filter, der zu den Standardverfahren im Bereich der Zustandsschätzung zählt. Aufgrund der präzisen Schätzungen, die mit dem Kalman Filter trotz vergleichsweise geringer Rechenzeit erzielt werden, ergibt sich die Notwendigkeit, Ansätze zu entwickeln, die auf dem Kalman Filter basieren und für hybride, dynamische Systeme geeignet sind.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Entwicklung eines Kalman Filters zur Zustandsschätzung in hybriden, dynamischen Systemen, der auf dem UKF basiert. Dieser Filter wird mit bereits existierenden Kalman Filter Varianten für hybride, dynamische Systeme – dem Salted Kalman Filter und dem Hybriden Unscented Kalman Filter – verglichen.

Die Auswertung erfolgt anhand von zwei Szenarien: Zunächst wird ein vereinfachtes eindimensionales Szenario eines fallenden Balls mit elastischem Aufprall betrachtet. Anschließend wird eine Simulation entwickelt, in der sich ein Ball im dreidimensionalen Raum realitätsnah unter Berücksichtigung relevanter physikalischer Einflüsse bewegt und mit zwei Kameras beobachtet wird. In Abbildung 1 ist diese Simulationsumgebung mit einer beispielhaften Flugbahn des Balls dargestellt. Für beide Szenarien wird die Konsistenz und der absolute Fehler der verschiedenen Filter untersucht und ausgewertet.

Der Beitrag dieser Arbeit besteht im Wesentlichen aus den folgenden Punkten:

- Entwicklung und Erläuterung einer Erweiterung des Unscented Kalman Filters, der die Sigmapunkte nicht in jedem Zeitschritt verwirft bzw. neu generiert, sondern diese beständig über die Zeitschritte hinweg beibehält und aktualisiert.

- Literaturrecherche zu existierenden Verfahren für die Zustandsschätzung von hybriden, dynamischen System mit Varianten des Kalman Filters.
- Modellieren von Dynamik- und Messmodellen für die betrachteten Szenarios (1D und 3D).
- Entwicklung und Implementierung der Simulationsumgebungen für die betrachteten Szenarios mit Python.
- Implementierung der untersuchten Kalman Filter Varianten für die betrachteten Szenarios.
- Auswertung der Ergebnisse für die untersuchten Kalman Filter Varianten in den betrachteten Szenarios.

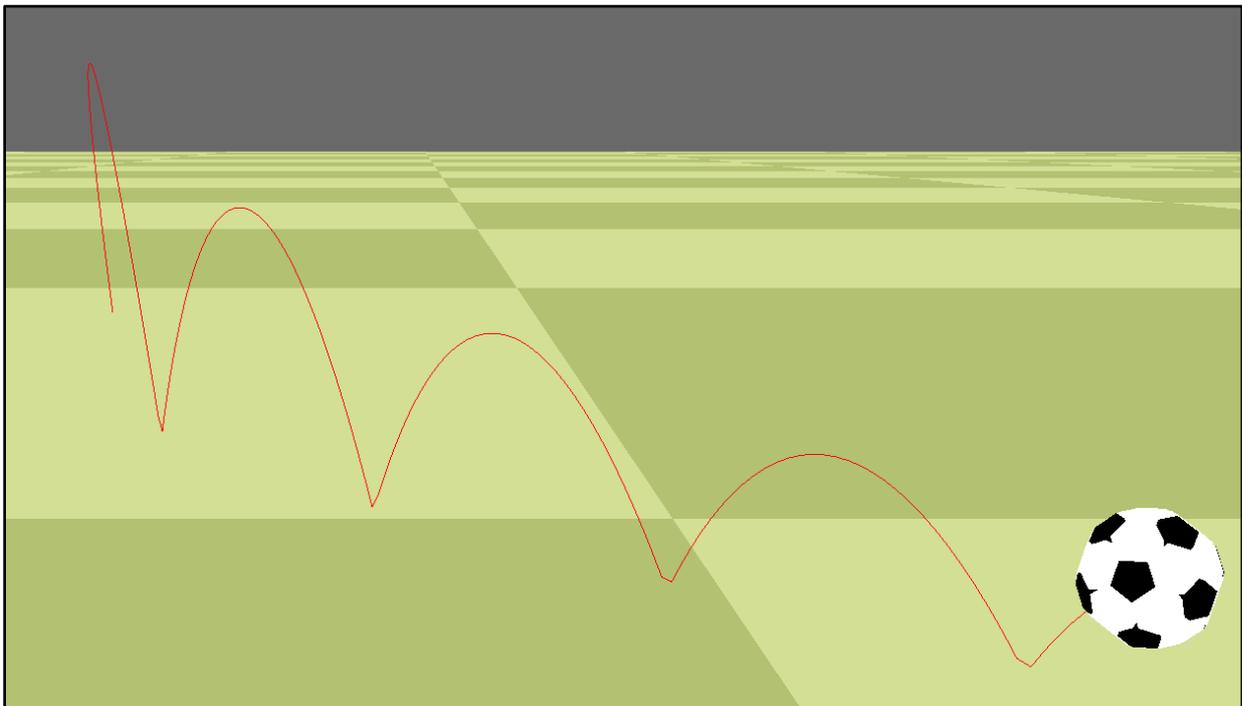


Abbildung 1: GUI für das 3D-Szenario

### 1.3 Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit beginnt mit einem Überblick über den Stand der Technik mit Verweisen auf die jeweilige Literatur. Anschließend wird ein Filter entwickelt, der auf dem Unscented Kalman Filter basiert und sich von diesem in dem Umgang mit den Sigmoidpunkten unterscheidet. Die beiden darauffolgenden Kapitel beschreiben die Szenarios, mit denen verschiedene Kalman Filter Varianten getestet werden. Dies umfasst jeweils sowohl die Modellierung und Implementierung der Systeme und Kalman Filter Varianten sowie der Simulationsumgebung. Anschließend folgt die Auswertung der verschiedenen Filter sowie ein Ausblick. Diese Arbeit endet mit einer Zusammenfassung.

## 2 Stand der Technik

In diesem Abschnitt wird auf den Stand der Technik eingegangen, auf dessen Basis die Ergebnisse dieser Arbeit entwickelt wurden.

### 2.1 Kalman Filter

Für die Zustandsschätzung dynamischer Systeme existieren zahlreiche Methoden. Eine davon ist der Kalman Filter (vgl. [Mar24]), der auf dem allgemeinen Bayes Filter basiert und mit dem Ziel entwickelt wurde, den nötigen Rechenaufwand zu minimieren. Dabei wird angenommen, dass sämtliche Prozesse linear sind und normalverteilte Zufallsgrößen beschreiben. Dementsprechend wird auch für den Systemzustand eine Wahrscheinlichkeitsverteilung geschätzt, die durch einen Mittelwert und eine Kovarianz charakterisiert wird. Der Algorithmus des Kalman Filters wird unterteilt in einen Dynamikschritt und einen Messschritt, in denen jeweils die Schätzungen des Zustands  $x_t$  (Mittelwert der Verteilung) und der Kovarianz  $\Sigma_t$  aktualisiert werden. Für ein zeit-diskretes System

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + v_t \quad (2.1)$$

wird die Schätzung des neuen Zustands  $x_t$  sowie dessen Kovarianz  $\Sigma_t$  im Dynamikschritt unter Berücksichtigung des vorherigen Zustands  $x_{t-1}$  sowie Zustandsübergangsmessungen  $u_t$  wie folgt berechnet:

$$\bar{x}_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t \quad (2.2)$$

$$\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + \Sigma_v \quad (2.3)$$

Dabei bildet die Matrix  $A_t$  vom aktuellen auf den folgenden Zustand ab und die Matrix  $B_t$  von der Zustandsübergangsmessung auf den folgenden Zustand. Für den Dynamikschritt wird ein normalverteiltes Rauschen  $v_t \sim N(0, \Sigma_v)$  angenommen.

Im Messschritt mit externen Beobachtungen / Messungen  $z_t$  des Systems gemäß

$$z_t = C_t x_t + w_t \quad (2.4)$$

werden der Zustand und dessen Kovarianz wie folgt aktualisiert:

$$x_t = \bar{x}_t + (z_t - C_t \bar{x}_t) \quad (2.5)$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + \Sigma_w)^{-1} \quad (2.6)$$

$$\Sigma_t = \bar{\Sigma}_t - K_t C_t \bar{\Sigma}_t \quad (2.7)$$

Die Matrix  $C_t$  bildet vom Zustand auf die Messung ab und  $w_t \sim N(0, \Sigma_w)$  ist das normalverteilte Rauschen der Messung.

Anschaulich ausgedrückt schätzt der Kalman Filter den neuen Zustand basierend auf dem bisherigen Zustand und der Dynamik des Systems und verknüpft die Zustandsgrößen über die Kovarianzmatrix miteinander. Externe Messungen dienen anschließend zur Korrektur dieser Schätzung, wobei durch die Kopplung über die Kovarianz auch nicht gemessene Zustandsgrößen angepasst werden. Die Stärke der Korrektur hängt vom Verhältnis der Unsicherheiten der aktuellen Schätzung und der Messung ab – je sicherer die Vorhersage, desto geringer der Einfluss der Messung.

### Extended Kalman Filter (EKF)

Treten im Dynamikmodell bzw. im Messmodell Nichtlinearitäten auf, kann der Kalman Filter nicht mehr ohne Weiteres verwendet werden. Der in [Mar24] beschriebene Extended Kalman Filter ermöglicht den Umgang mit Nichtlinearitäten, indem die Modelle an der aktuellen Schätzung linearisiert werden. Die Schätzung des Zustands im Dynamik- und Messmodell erfolgt dann mit

$$\bar{x}_t = g(x_{t-1}, u_t) \quad (2.8)$$

$$x_t = \bar{x}_t + K_t(z_t - h(\bar{x}_t)) \quad (2.9)$$

und für die Berechnung der Kovarianzen werden die Jacobi-Matrizen des Dynamikmodells  $g$  bzw. des Messmodells  $h$

$$A_t = \frac{\partial}{\partial x} g(x_{t-1}, u_t) \quad (2.10)$$

$$C_t = \frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_t) \quad (2.11)$$

bestimmt und wie in Gleichung (2.3) bzw. (2.7) angewendet.

### Unscented Kalman Filter (UKF)

Der in [Jul97] vorgestellte Unscented Kalman Filter bietet eine weitere Möglichkeit, mit Nichtlinearitäten umzugehen. Dieser basiert auf der sogenannten Unscented Transform, bei der eine Menge von Punkten (Sigma-Punkte) nach festgelegten Regeln aus der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zustands ausgewählt wird, sodass diese die geschätzte Verteilung des Zustands eindeutig repräsentieren. Auf die Sigma-Punkte wird dann jeweils die Dynamik- bzw. Messfunktion angewendet, um anschließend aus der Liste der transformierten Sigma-Punkte den gewichteten Mittelwert und die gewichtete Kovarianz zu bestimmen. Häufig sind die Gewichte aller Sigma-Punkte gleichgroß gewählt, was auch im Folgenden angenommen wird. Die Generierung der Sigma-Punkte erfolgt gemäß

$$\chi_{t-1} = \left( x_{t-1}, x_{t-1}, x_{t-1} \pm \sqrt{(n+1)\Sigma_{t-1}} \right) \quad (2.12)$$

sodass die Anzahl der Sigma-Punkte  $2n+2$  beträgt. Dabei ist  $n$  die Länge des Zustandsvektors. Für den Dynamikschritt wird zunächst das Dynamikmodell auf die Sigma-Punkte angewendet:

$$\bar{\chi}_t^* = g(\chi_{t-1}, u_t) \quad (2.13)$$

Die aktualisierten Schätzungen des Zustands und der Kovarianz wird aus dem Mittelwert und der Kovarianz der Sigma-Punkte ermittelt:

$$\bar{x}_t = \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} \sum_i \bar{\chi}_t^{*(i)} \quad (2.14)$$

$$\bar{\Sigma}_t = \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} \sum_i (\bar{\chi}_t^{*(i)} - \bar{x}_t)(\bar{\chi}_t^{*(i)} - \bar{x}_t)^T + \Sigma_v \quad (2.15)$$

Für den Messschritt werden die Sigma-Punkte wie folgt generiert:

$$\bar{\chi}_t = \left( \bar{x}_t, \bar{x}_t, \bar{x}_t \pm \sqrt{(n+1)\bar{\Sigma}_t} \right) \quad (2.16)$$

Auf diese wird anschließend das Messmodell angewendet:

$$\bar{z}_t = h(\bar{\chi}_t) \quad (2.17)$$

Aus den beiden Mengen  $\bar{\chi}_t$  und  $\bar{Z}_t$  werden der Mittelwert und die Kovarianzen

$$\hat{z}_t = \frac{1}{|\bar{Z}_t|} \sum_i \bar{Z}_t^{(i)} \quad (2.18)$$

$$\Sigma_t^z = \frac{1}{|\bar{Z}_t|} \sum_i (\bar{Z}_t^{(i)} - \hat{z}_t)(\bar{Z}_t^{(i)} - \hat{z}_t)^T + \Sigma_w \quad (2.19)$$

$$\Sigma_t^{x,z} = \frac{1}{|\bar{Z}_t|} \sum_i (\bar{\chi}_t^{(i)} - \bar{x}_t)(\bar{Z}_t^{(i)} - \hat{z}_t)^T \quad (2.20)$$

bestimmt, die zum Aktualisieren der Schätzung und der Kovarianz genutzt werden:

$$K_t = \Sigma_t^{x,z} (\Sigma_t^z)^{-1} \quad (2.21)$$

$$x_t = \bar{x}_t + K_t (z_t - \hat{z}_t) \quad (2.22)$$

$$\Sigma_t = \bar{\Sigma}_t - K_t (\Sigma_t^{x,z})^T \quad (2.23)$$

Der UKF bietet gegenüber dem EKF u. a. die Vorteile, dass sich Linearisierungsfehler nicht negativ auf die Schätzung auswirken können und keine Jacobi-Matrizen berechnet werden müssen. Außerdem kann der UKF wie in [Her13] vorgestellt auf  $\mathbb{H}$ -Mannigfaltigkeiten generalisiert werden. Dies ist beispielsweise nützlich, um Rotationen bzw. Orientierungen im dreidimensionalen Raum schätzen zu können.

## 2.2 Hybride, dynamische Systeme

Sofern in einem System Unstetigkeiten wie beispielsweise der Aufprall eines Objektes am Boden oder der Zusammenstoß mit einem anderen Objekt auftreten, die sich nicht oder nur sehr aufwändig mit den Möglichkeiten zur Beschreibung stetiger Systeme modellieren lassen, findet die Theorie der hybriden, dynamischen Systeme Anwendung. Ein hybrides, dynamisches System, wie in [Goe09] beschrieben, zeichnet sich dadurch aus, dass es in verschiedenen Modi arbeiten kann. Für jeden Modus wird eine Domäne definiert, die die Dimension und den Wertebereich definiert, in denen sich die Zustandsvariablen entwickeln können. Die Veränderung der Zustandsvariablen wird über Differentialgleichungen ausgedrückt, die in diesem Kontext als Flow Map bezeichnet werden. Für die Übergänge zwischen den Modi sind sogenannte Guard Maps definiert. Sobald die Zustandsvariablen des Systems zu der Subniveaumenge zum Niveau 0 gehören, die durch die Guard Map definiert ist, wechselt das System in den neuen Modus. Dieser Übergang erfolgt durch die Anwendung der sogenannten Reset Map, die definiert, wie die Zustandsvariablen in der Domäne des neuen Modus in Abhängigkeit von den bisherigen Werten initialisiert werden. Die formale Definition eines hybriden, dynamischen Systems ist in Abbildung 2 dargestellt und lautet wie folgt:

- **Zustand:**  $\xi \in \mathbb{R}^n$  repräsentiert die Zustandsvariable des Systems.
- **Modi:**  $Q = \{0, \dots, n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Liste aller gültigen Modi.
- **Modusübergänge:**  $E \subseteq Q \times Q$  definiert alle möglichen Modusübergänge.
- **Domänen:**  $D = \{q \rightarrow \mathbb{R}^n \mid q \in Q\}$  definiert für jeden Modus einen Wertebereich in denen sich  $\xi$  entwickelt.
- **Flow Map:**  $f: Q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschreibt die Entwicklung des Zustands  $\xi$  für jeden Modus durch Differentialgleichungen.

- **Guard Map:**  $G_E = G_{(I,J)} = \{x \in D_I \mid g_{(I,J)}(x, t) \leq 0\}$  ist eine Subniveaumenge zum Niveau 0 für jeden möglichen Modusübergang. Sobald  $\xi \in G_{I,J}$  wird in den Modus  $J$  und Domäne  $D_J$  übergegangen und die Reset Map angewendet.
- **Reset Map:**  $R_E = R_{(I,J)}: G_{(I,J)} \times D_I \rightarrow D_J$  bildet den aktuellen Zustand bei erfüllter Guard-Bedingung auf die neue Domäne ab.

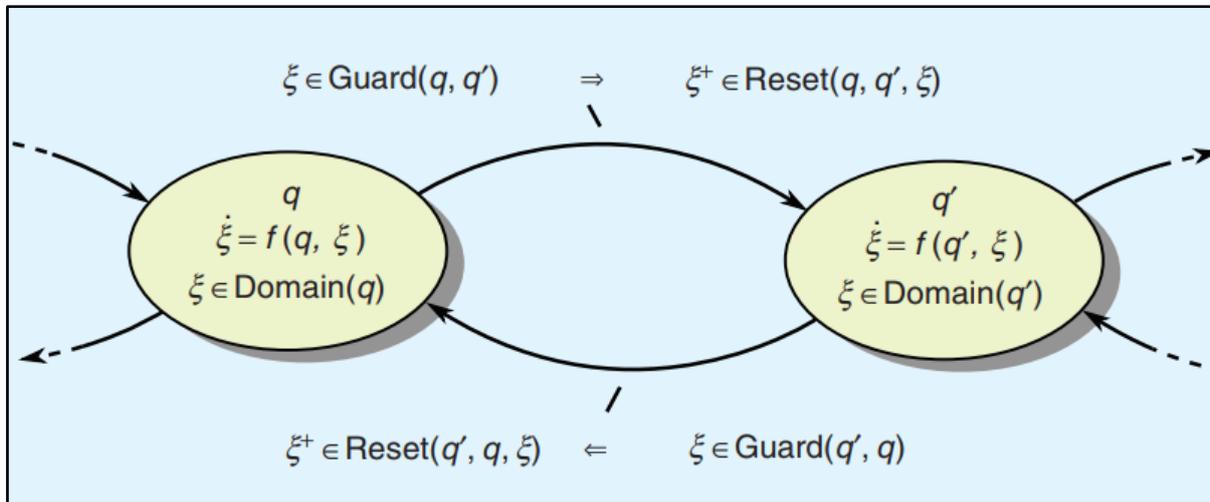


Abbildung 2: Allgemeines hybrides, dynamisches System [Goe09]

Die Zustandsschätzung eines hybriden, dynamischen Systems mit einem der in Abschnitt 2.1 erläuterten Kalman Filter ist nicht ohne Weiteres möglich, da insb. die Unstetigkeiten und Modusübergänge nicht von der Theorie vorgesehen sind.

Zur Veranschaulichung eines hybriden, dynamischen Systems soll das in dieser Arbeit betrachtete Szenario des fallenden Balls kurz beschrieben werden. Das System besitzt nur einen Modus, da sich der Ball stets nach den physikalischen Gesetzen bewegt, die durch die Flow Map beschrieben werden. Der einzige Modusübergang tritt auf, wenn der Ball den Boden erreicht. Die Guard Map definiert dafür alle Punkte unterhalb des Bodenniveaus, und die Reset Map kehrt an dieser Stelle die Geschwindigkeit um, sodass der sich Ball wieder vom Boden wegbewegt.

### 2.3 Salted Kalman Filter

Ein Ansatz zur Zustandsschätzung von hybriden, dynamischen Systemen wird in [Kon25] vorgestellt. Dieser stellt eine Erweiterung des EKF dar und wird Salted Kalman Filter genannt. Das größte Problem bei der Anwendung eines EKF auf ein hybrides, dynamisches System ist die korrekte Schätzung der Kovarianz bei Modusübergängen. Würde hierfür analog zum Dynamik- bzw.- Messschritt des EKF die Jacobi-Matrix der Reset Map verwendet werden, führte dies zu systematischen Fehlern. Die Ursachen hierfür sind insb. die Unsicherheit bezüglich des Zeitpunkts, zu dem der Modusübergang stattfindet, sowie die Tatsache, dass in verschiedenen Modi unterschiedliche Systemdynamiken Anwendung finden. Um auch diese Effekte zu berücksichtigen, wird anstelle der Jacobi-Matrix der Reset Map die sogenannte Saltation Matrix verwendet. Die Saltation Matrix ermöglicht es, die Kovarianz über Modus- und Dynamikgrenzen hinweg in linearer Näherung korrekt zu berechnen. Neben der Zustandsschätzung findet die Saltation Matrix vor allem im Kontext der Regelung nichtlinearer

Systeme Anwendung. Ein Überblick über die Theorie zur Saltation Matrix findet sich in [Kon24]. Der Unterschied zwischen der Transformation der Kovarianz mit der Jacobi-Matrix der Reset Map und der Saltation Matrix ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Jacobi-Matrix der Reset Map liefert hierfür kein korrektes Ergebnis. Dies liegt vereinfacht ausgedrückt daran, dass hierbei unberücksichtigt bleibt, wann verschiedene Punkte der Verteilung die Dynamikgrenze erreichen. Dies hat jedoch einen erheblichen Einfluss auf die Transformation der Kovarianz. Auch die Abhängigkeit der Reset Map und der Guard Map von der Zeit können einen Einfluss haben. All dies wird mittels der Saltation Matrix in linearer Näherung berücksichtigt. Die Berechnung der Saltation erfolgt gemäß

$$\Xi_{I,J} = D_x R^- + \frac{(F_J^+ - D_x R^- F_I^- - D_t R^-) D_x g^-}{D_t g^- + D_x g^- F_I^-} \quad (2.24)$$

wobei die hochgestellten „+“ und „-“ die Zeitpunkte unmittelbar nach bzw. vor dem Modusübergang anzeigen, und  $D_x$  und  $D_t$  die Bildung der Jacobi Matrix nach den Zustandsgrößen bzw. nach der Zeit anzeigen. Außerdem gelten folgende Definitionen:

- $F_I^- := F_I(t^-, x(t^-))$ : Dynamik (Flow Map) vor dem Modusübergang
- $F_J^+ := F_J(t^+, x(t^+))$ : Dynamik (Flow Map) nach dem Modusübergang
- $x(t^+) := R_{(I,J)}(t^-, x(t^-))$ : Reset des Zustands in neuer Domäne
- $D_x R^- := D_x R_{(I,J)}(t^-, x(t^-))$ : Jacobi-Matrix der Reset Map nach dem Zustand
- $D_t R^- := D_t R_{(I,J)}(t^-, x(t^-))$ : Jacobi-Matrix der Reset Map nach der Zeit
- $D_x g^- := D_x g_{(I,J)}(t^-, x(t^-))$ : Jacobi-Matrix der Guard Map nach dem Zustand
- $D_t g^- := D_t g_{(I,J)}(t^-, x(t^-))$ : Jacobi-Matrix der Guard Map nach der Zeit

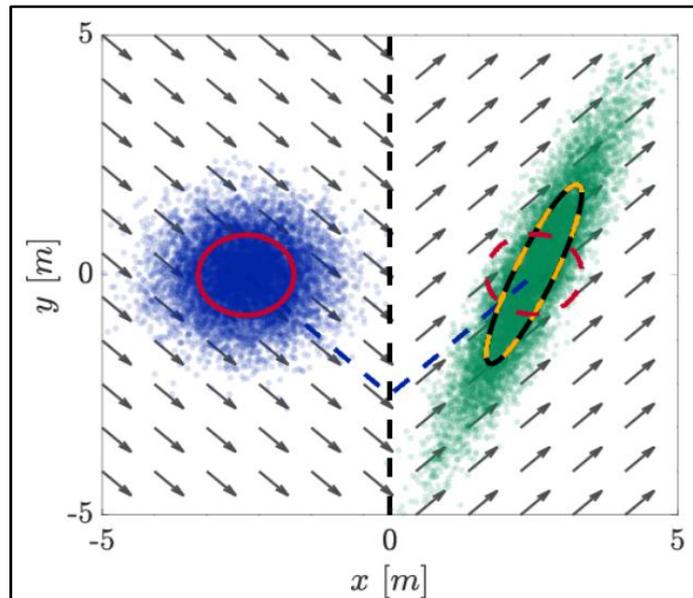


Abbildung 3: Kovarianz Propagation mit Saltation Matrix [Kon25]

Jeder Punkt der ursprünglichen Verteilung (blaue Punkte, Kovarianz als rote, durchgezogene Linie dargestellt) folgt der Dynamik (graue Pfeile), die sich an der Dynamikgrenze (schwarze gestrichelte Linie) ändert. Nach einem definierten Zeitintervall ergibt sich die neue Verteilung (grüne Punkte) mit der neuen Kovarianz (schwarze Linie). Verglichen werden die auf Grundlage der ursprünglichen Kovarianz geschätzten neuen Kovarianzen mittels Saltation Matrix (gelbe Linie) und Jacobi Matrix der Reset Map (rote, gestrichelte Linie).

Der Algorithmus des Salted Kalman Filter basiert auf dem des Extended Kalman Filters mit den folgenden Erweiterungen bzw. Anpassungen und der Verwendung der Saltation Matrix:

- Im Dynamikschritt wird das Dynamikmodell (vgl. Gleichungen **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**), (2.10) und (2.3)) bis zu dem Zeitpunkt  $t_0$  angewendet, an dem eine Guard-Bedingung erfüllt ist. An diesem Zeitpunkt wird der Modus und die Domäne entsprechend gewechselt sowie die Reset Map auf den Zustand und die Saltation Matrix auf die Kovarianz wie folgt angewendet mit dem normalverteilten Rauschen mit der Kovarianz  $\Sigma_s$ :

$$\bar{x}_{t_0} = R_{(I,J)}(t, x_{t_0}) \quad (2.25)$$

$$\bar{\Sigma}_{t_0} = \Xi_{(I,J)} \Sigma_{t_0} \Xi_{(I,J)}^T + \Sigma_s \quad (2.26)$$

- Anschließend wird das Dynamikmodell des neuen Modus für die restliche Zeit des Dynamikschritts angewendet.
- Ist durch die Aktualisierung der Schätzung im Messschritt eine Guard-Bedingung erfüllt, werden der Zustand und die Kovarianz anschließend durch Anwendung der Reset Map sowie der Saltation Matrix wie im Dynamikschritt aktualisiert. Die Voraussetzung hierfür ist, dass die Aktualisierung durch den Messschritt hinreichend klein ist.

Sofern die notwendigen Annahmen für die Anwendung eines Kalman Filter eingehalten werden, sowie die Annahme getroffen werden kann, dass Modusübergänge innerhalb weniger Zeitschritte abgeschlossen werden, sei der Salted Kalman Filter statistisch nicht von einem Partikelfilter zu unterscheiden und biete je nach Partikelanzahl des Partikelfilters eine deutliche Verringerung der Rechenzeit. Die Berechnung der Saltation Matrix könne allerdings je nach verwendetem Modell mit einem größeren Aufwand verbunden sein.

## 2.4 Hybrider Unscented Kalman Filter

Um Zustandsschätzungen für ein hybrides, dynamisches System vornehmen zu können, die auf dem Unscented Kalman Filter basieren, wurden in [Bit23] zwei Varianten für einen Hybriden Unscented Kalman Filter (HUKF) vorgestellt: Der HUKF mit Sigmapunkt-Generierung (SPG) und der HUKF mit Sigmapunkt-Transformation (SPT). Beide Varianten arbeiten grundsätzlich wie der gewöhnliche UKF und unterscheiden sich von diesem im Dynamikschritt in der Nähe der Dynamikgrenzen bzw. bei erfüllter Guard-Bedingung (vgl. Abbildung 4):

Beim HUKF-SPG wird das Dynamikmodell auf die Sigmapunkte angewendet bis zu dem Zeitpunkt, an dem deren Mittelwert die Guard-Bedingung erfüllt. Zu diesem Zeitpunkt wird die Kovarianz dieser Sigmapunkte berechnet, welche daraufhin verworfen werden. Anschließend wird die Reset Map auf den Mittelwert angewendet. Um diesen Mittelwert herum werden nun neue Sigmapunkte mit der zuvor bestimmten Kovarianz generiert, auf die das Dynamikmodell für den neuen Modus für die restliche Zeit des Dynamikschrittes angewendet wird.

Beim HUKF-SPT wird das Dynamikmodell ebenfalls bis zu dem Zeitpunkt auf die Sigmapunkte angewendet, bis deren Mittelwert die Guard-Bedingung erfüllt. Anschließend wird das Dynamikmodell auf alle Sigmapunkte angewendet, so dass jeder einzelne sich auf der Dynamikgrenze befindet. Dementsprechend wird für jeden Sigmapunkt ein individueller

Zeitschritt gewählt, der auch negativ sein kann, sofern der entsprechende Sigmapunkt bereits die Dynamikgrenze passierte. Befinden sich alle Sigmapunkte auf der Dynamikgrenze, wird die Reset Map auf alle Sigmapunkte angewendet. Anschließend wird das Dynamikmodell des neuen Modus auf alle Sigmapunkte angewendet. Der Zeitschritt hierfür ist für jeden Sigmapunkt individuell. Es wird der gleiche Zeitschritt verwendet, mit dem zuvor die Sigmapunkte auf die Dynamikgrenze gebracht wurde, multipliziert mit  $-1$ . Zuletzt wird das neue Dynamikmodell auf alle Sigmapunkte für die verbleibende Zeit des Dynamikschrittes angewendet, um dann den Mittelwert und die Kovarianz aus den Sigmapunkten zu berechnen. Beide Varianten des HUKF benötigen bei Modusübergängen mehr Rechenzeit als der gewöhnliche UKF, liefern jedoch bessere Schätzungen. Der HUKF-SPT erwies sich in den durchgeführten Evaluationen als genauer, bringt jedoch den Nachteil mit sich, dass das Anwenden des Dynamikmodells mit negativen Zeitschritten nicht für jedes System möglich ist. Für solche Systeme kann der HUKF-SPT somit nicht eingesetzt werden.

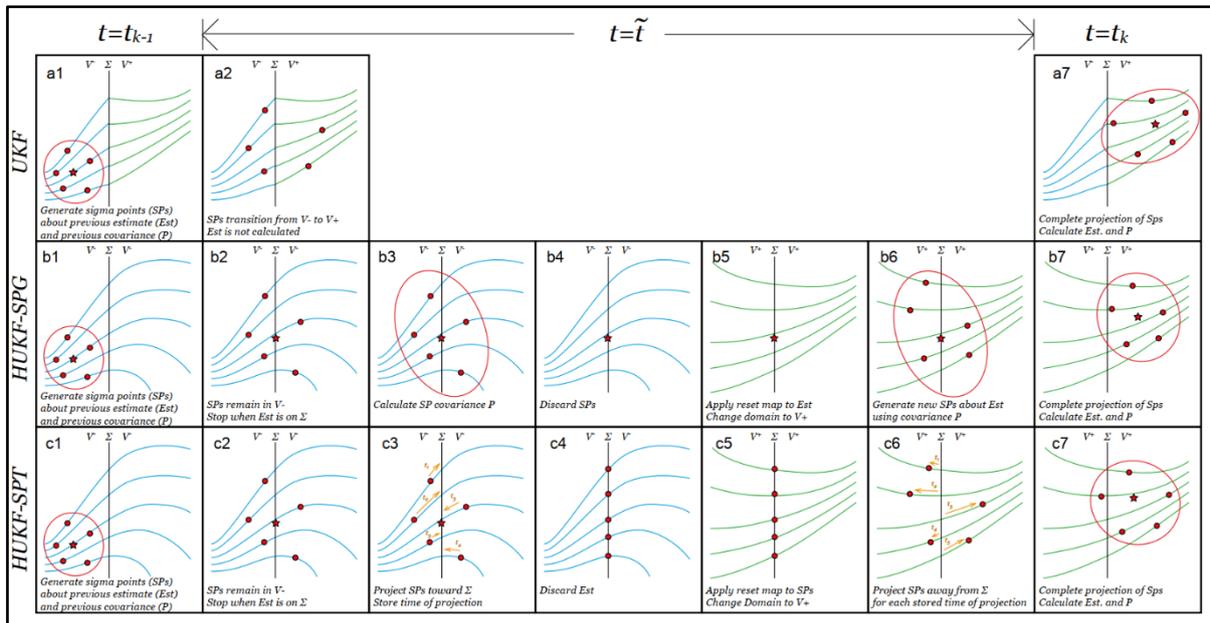


Abbildung 4: HUKF Dynamikschritt [Bit23]

Eine Gegenüberstellung der prinzipiellen Dynamikschritte des gewöhnlichen UKF (erste Zeile), des HUKF mit Sigmapunkt-Generierung (zweite Zeile) und des HUKF mit Sigmapunkt-Transformation. Legende: Mittelwert der Sigmapunkte (roter Stern), Sigmapunkt (roter Kreis), Kovarianz (rote Linie), Dynamikgrenze (schwarze Linie), Dynamik vor Modusübergang (blaue Linie), Dynamik nach Modusübergang (grüne Linie).

## 2.5 Ballphysik

Für die Simulation eines Balls und das Dynamikmodell der Filter, die die Ballbewegung schätzen, wird ein Modell für die Bewegung des Balls benötigt. Grundsätzlich werden hierfür die Bewegungsgleichungen

$$s = \frac{1}{2}at^2 + vt + s_0 \tag{2.27}$$

$$v = at + v_0 \tag{2.28}$$

verwendet. Die Beschleunigung, die auf den Ball wirkt, wird maßgeblich durch die Kräfte der Gravitation, Luftreibung und den Magnus-Effekt bestimmt. Der Aufprall des Balls am Boden macht das System zu einem hybriden, dynamischen System, da dieser eine Unstetigkeit in

das System bringt. Im Folgenden werden die Gleichungen für die Beschleunigung sowie den Aufprall am Boden erläutert.

### 2.5.1 Beschleunigung

Die Kräfte, die auf einen Ball in der Luft wirken, werden in [Mes90] hergeleitet und sind im Folgenden aufgeführt.

#### Gravitation

Die Beschleunigung, die aufgrund der Gravitation auf den Ball einwirkt, betrifft ausschließlich die z-Komponente und ist definiert als

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,81 \end{pmatrix} \frac{m}{s^2} \quad (2.29)$$

#### Luftreibung

Die Luftreibung übt eine Kraft auf den Ball aus, die von der Luftdichte  $\rho$ , dem Radius des Balls  $r$ , dem Luftwiderstandskoeffizienten  $c_D$  und dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit  $v_s = -v$  abhängt. Die Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet hierbei die Relativgeschwindigkeit der Luftströmung in Bezug auf die Bewegungsrichtung des Balls (die Windgeschwindigkeit wird in dieser Arbeit nicht explizit berücksichtigt). Wird die Kraft, die aus der Luftreibung resultiert, durch die Masse des Balls dividiert, ergibt sich für die Beschleunigung folgende Formel:

$$a_{Luft} = \frac{1}{2m} \rho r^2 \pi c_D |v_s|^2 \frac{v_s}{|v_s|} \quad (2.30)$$

#### Magnus-Effekt

Der Magnus-Effekt bezeichnet das physikalische Phänomen, bei dem eine Kraft auf ein Objekt wirkt, welches rotiert und von einer Strömung umgeben ist. Die resultierende Kraft steht senkrecht zu der Strömungsrichtung und der Drehachse. Der Magnus-Effekt ist somit beispielsweise verantwortlich für die gekrümmte Flugbahn von rotierenden Objekten in einer Strömung. Für die Beschleunigung durch den Magnus-Effekt ergibt sich

$$a_{Magnus} = \frac{1}{2m} \rho r^3 \pi c_S (v_s \times \omega) \quad (2.31)$$

wobei  $c_S$  der Koeffizient des Magnus-Effekts und  $\omega$  der Rotationsvektor sind.

### 2.5.2 Aufprall

Beim Aufprall des Balls auf dem Boden findet aufgrund von Reibung eine Veränderung der Geschwindigkeit und der Rotation des Balls statt. So wird beispielsweise ein Ball, der sich beim Fallen nicht in x- oder y-Richtung bewegt und um die x-Achse rotiert, nach dem Aufprall auch entlang der y-Achse bewegen. Dementsprechend nimmt aufgrund der Energieerhaltung die Winkelgeschwindigkeit um die x-Achse ab. Diese Wechselwirkung wird in [Nak10] modelliert und unterscheidet abhängig vom Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G$ , dem Restitutionskoeffizienten  $e_{cor}$  und dem Verhältnis des Betrags der Geschwindigkeit in z-Richtung  $|v_z|$  und der Norm des Vektors der Tangentialgeschwindigkeit des Balls am Kontaktpunkt

$$v_T = \begin{pmatrix} v_x - r\omega_y \\ v_y + r\omega_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

in zwei Arten des Kontakts: Rollender Kontakt und rutschender Kontakt. Diese Unterscheidung wird anhand von

$$v = 1 - \frac{5}{2}(1 + e_{cor}) \frac{|v_z|}{\|v_T\|} \quad (2.33)$$

getroffen, wobei bei  $v \geq 0$  vom rutschenden Kontakt ausgegangen wird und andernfalls vom rollenden Kontakt. In beiden Fällen werden die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit nach dem Aufprall wie folgt berechnet:

$$v' = A_v v + B_v \omega \quad (2.34)$$

$$\omega' = A_\omega v + B_\omega \omega \quad (2.35)$$

Die Matrizen  $A_v, B_v, A_\omega, B_\omega$  werden in Abhängigkeit von der Art des Kontakts definiert. Für den rutschenden Kontakt lauten diese

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -e_{cor} \end{pmatrix}, B_v = \begin{pmatrix} 0 & \alpha r & 0 \\ \alpha r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3\alpha}{2r} & 0 \\ \frac{3\alpha}{2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_\omega = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

mit

$$\alpha = \mu_G (1 + e_{cor}) \frac{|v_z|}{\|v_T\|} \quad (2.37)$$

Für den rollenden Kontakt lauten die Matrizen wie folgt:

$$A_v = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -e_{cor} \end{pmatrix}, B_v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2r}{5} & 0 \\ -\frac{2r}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5r} & 0 \\ \frac{3}{5r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_\omega = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

## 2.6 Kameramodell

Für die Beobachtung des Balls werden Kameras verwendet. Die Modellierung erfolgt mittels eines projektiven Lochkameramodells mit einer radialen Verzerrung in Anlehnung an [Har03]. Ein Kameramodell definiert typischerweise eine Abbildung von Koordinaten im dreidimensionalen Raum auf Koordinaten im zweidimensionalen Raum. Der dreidimensionale Raum entspricht dabei dem Raum, in dem sich das beobachtete Objekt bewegt, und der zweidimensionale Raum entspricht dem Kamerabild.

Bei diesem Modell werden zunächst die Koordinaten des Balls vom globalen Koordinatensystem der Welt  $p_W$  in das Koordinatensystem der Kamera  $p_C$  mittels der homogenen Transformation  $T_{C \leftarrow W}$  umgerechnet.

$$p_C = T_{C \leftarrow W} p_W \quad (2.39)$$

Anschließend werden die Koordinaten des Balls  $p_C$  durch Anwenden des Strahlensatzes in normalisierten (Brennweite wird zunächst mit Wert 1 angenommen) Bildkoordinaten  $\bar{p}_B$  umgerechnet (vgl. Abbildung 5):

$$\bar{p}_B = \begin{pmatrix} p_{C,x} & p_{C,y} \\ p_{C,z} & p_{C,z} \end{pmatrix}^T \quad (2.40)$$

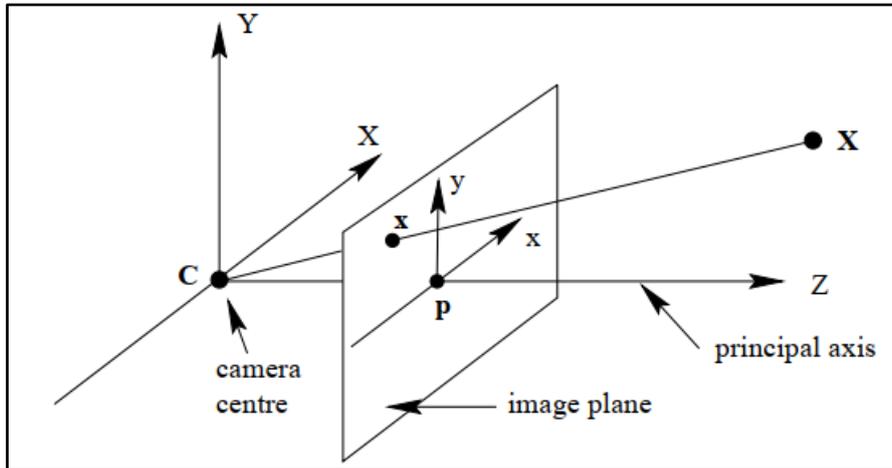


Abbildung 5: Lochkameramodell [Har03]

Auf die Bildkoordinaten wird das radiale Verzerrungsmodell

$$\tilde{p}_B = \bar{p}_B \cdot (1 + \kappa_1(\bar{p}_{B,x}^2 + \bar{p}_{B,y}^2) + \kappa_2(\bar{p}_{B,x}^2 + \bar{p}_{B,y}^2)^2) \quad (2.41)$$

angewendet, das eine Verzerrung modelliert, die mit zunehmender Entfernung zum Bildmittelpunkt zunimmt.

Im letzten Schritt werden die Koordinaten entsprechend der Kameraparameter  $\lambda$  (Brennweite, Pixelgröße, Bildgröße, etc.) skaliert und anschließend um den Bildmittelpunkt  $(u_0, v_0)$  verschoben (vgl. Abbildung 6):

$$p_B = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \lambda \tilde{p}_B \quad (2.42)$$

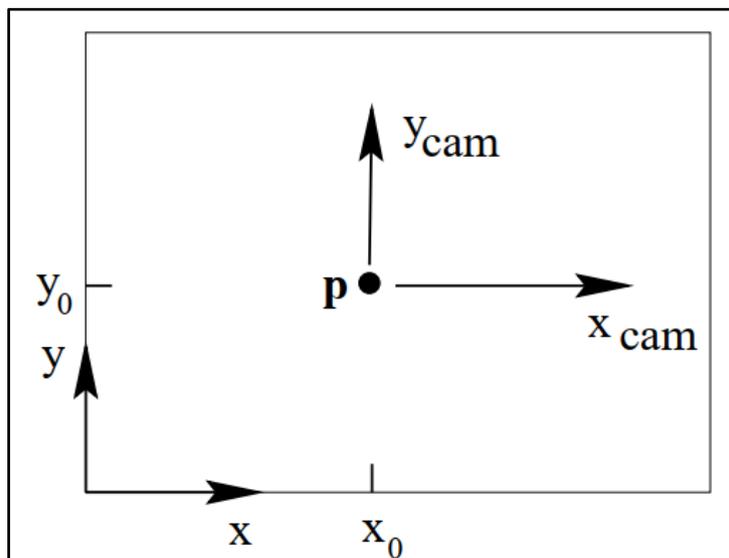


Abbildung 6: Verschiebung des Bildmittelpunkts [Har03]

## 3 Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmapunten

In diesem Abschnitt wird eine Variante des UKF vorgestellt, die darauf basiert, die Sigmapunten nicht in jedem Schritt neu zu generieren, sondern diese über alle Zeitschritte zu behalten. Hierfür wird zunächst die Motivation sowie die zugrundeliegende Idee erläutert. Anschließend werden die Besonderheiten der resultierenden Dynamik- und Messschritte erläutert.

### 3.1 Motivation und Idee

Für die Zustandsschätzung eines hybriden, dynamischen Systems kann zwar mit den in Abschnitt 2 beschriebenen Salted Kalman Filter und Hybriden Unscented Kalman Filter umgesetzt werden, jedoch bringen beide Varianten Nachteile mit sich. Der SKF hat neben dem vergleichsweise hohen Modellierungsaufwand für bestimmte Anwendungen den Nachteil, dass es nicht ohne Weiteres möglich ist, Orientierungen im dreidimensionalen Raum zu schätzen. Mit dem HUKF ist dies zwar möglich, jedoch sind die Nachteile hier, dass der HUKF-SPT nur bei konservativen Systemen angewendet werden und der HUKF-SPG die Propagation der Kovarianz beim Modusübergang nicht über die Dynamikgrenze vornimmt, sondern lediglich die Reset Map auf den Mittelwert anwendet und anschließend neue Sigmapunten mit der alten Kovarianz generiert.

Dies wirft die Frage auf, ob es möglich ist, einen UKF zu verwenden, der die Sigmapunten nicht in jedem Schritt neu generiert, sondern diese für alle Zeitschritte behält und gleichzeitig den Anforderungen und Gleichungen des UKF genügt. Durch die Verwendung von solchen zeitbeständigen Sigmapunten ist es möglich, den Dynamik- und Messschritt für jeden Sigmapunkt individuell durchzuführen und anschließend den Mittelwert und die Kovarianz aus diesen zu bestimmen, ohne die Sigmapunten zu verwerfen. Würde ein UKF verwendet werden, ist zu vermuten, dass in den Momenten, in denen nur einige der Sigmapunten im Bereich der Guard Map liegen bzw. Momente, in denen nicht alle Sigmapunten den gleichen Modus haben und sich somit in verschiedenen Domänen befinden, Inkonsistenzen bzw. Implausibilitäten bei der Erzeugung der Sigmapunten auftreten können. In so einem Fall stellt sich die Frage, ob der UKF überhaupt zuverlässig einsetzbar ist. In den folgenden Abschnitten werden der Dynamik- und Messschritt eines UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten vorgestellt, die die gleichen Mittelwerte und Kovarianzen wie der UKF in Abschnitt 2.1 liefern.

### 3.2 Dynamik

Zu Beginn des Dynamikschritts des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten wird das Dynamikmodell auf jeden Sigmapunkt angewendet. Aus den resultierenden Sigmapunten kann dann wie beim UKF der Mittelwert berechnet werden. Die Generierung der Sigmapunten zu Beginn des Dynamikschritts entfällt, da diese bereits bei der Initialisierung erzeugt wurden und nie verworfen werden.

Der wesentliche Unterschied zum UKF im Dynamikschritt tritt bei der Berechnung der Kovarianz auf, denn beim UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten muss das Rauschen direkt

in den Sigmapunkten enthalten sein. Würde die Berechnung der Kovarianz nach Formel (2.15) erfolgen, wäre die Information über die Kovarianz bereits nach diesem Schritt wieder verworfen, da die Sigmapunkte im nächsten Schritt nicht neu aus der aktualisierten Kovarianz generiert werden. Um nun das Rauschen direkt mit den Sigmapunkten zu repräsentieren, wird zunächst die Matrix  $A$  eingeführt, in der jede Spalte die Differenz eines Sigmapunkts (nach Anwendung des Dynamikmodells) zum Mittelwert der Sigmapunkte beinhaltet:

$$A_{\{i,j\}} = \bar{\chi}_t^{*(i)} - \bar{x}_t \quad (3.1)$$

Nun lässt sich Gleichung (2.15) wie folgt darstellen:

$$\bar{\Sigma}_t = \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} AA^T + \Sigma_v \quad (3.2)$$

Da die Kovarianz inklusive des Rauschens in den Sigmapunkten enthalten sein soll, muss das Rauschen mit dem Mittelwert 0 und der Kovarianz  $\Sigma_v$  auf die Sigmapunkte „aufgeteilt“ werden. Hierfür wird angenommen, dass auf jeden Sigmapunkt ein Rauschen in Form der Vektoren  $\delta_i$  addiert wird, welche ebenfalls spaltenweise zu einer Matrix  $\Delta$  zusammengefasst werden, die das gleiche Format aufweist wie  $A$ . Aus  $A_{\{i,j\}} + \delta_i = \bar{\chi}_t^{*(i)} - \bar{x}_t + \delta_i$  folgt somit

$$\bar{\Sigma}_t = \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} (A + \Delta)(A + \Delta)^T = \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} (AA^T + A\Delta^T + \Delta A^T + \Delta\Delta^T) \quad (3.3)$$

Es wird die Annahme getroffen, dass das Rauschen verhältnismäßig klein ist und somit kann der Term  $\Delta\Delta^T$  vernachlässigt werden. Durch Gleichsetzen von Gleichung (3.2) und (3.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} AA^T + \Sigma_v &= \frac{1}{|\bar{\chi}_t^*|} (AA^T + A\Delta^T + \Delta A^T + \Delta\Delta^T) \\ |\bar{\chi}_t^*| \Sigma_v &= A\Delta^T + \Delta A^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wiederum umformulieren zu:

$$\sum_i A_{ji} \Delta_{ki} + \Delta_{ji} A_{ki} = |\bar{\chi}_t^*| \Sigma_{v,jk} \quad (3.5)$$

Diese Gleichung (3.5) kann nun in die Form eines Gleichungssystems gebracht werden, um eine Lösung für  $\Delta$  zu bestimmen. Hierfür kommen das Kronecker-Produkt

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

und der Vektorisierungsoperator

$$\text{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

sowie die Vertauschungsmatrix  $K$

$$\text{vec}(\Delta^T) = K \cdot \text{vec}(\Delta) \quad (3.8)$$

zur Anwendung, die in [Mag19] beschrieben sind. Das Ziel ist ein Gleichungssystem der Form

$$B \cdot \text{vec}(\Delta) = C \quad (3.9)$$

Um dies zu erreichen, werden zunächst die Summanden aus Gleichung (3.5) separat betrachtet. Für  $\sum_i A_{ji} \Delta_{ki}$  ergibt sich ein Ausdruck, der äquivalent ist zu

$$(I \otimes A) \text{vec}(\Delta^T) = (I \otimes A) K \cdot \text{vec}(\Delta)$$

Und  $\sum_i \Delta_{ji} A_{ki}$  lässt sich analog hierzu schreiben als

$$(A \otimes I) \cdot \text{vec}(\Delta)$$

wobei die Einheitsmatrix  $I$  das gleiche Format aufweist wie  $\Sigma_v$  ist. Diese beiden Ausdrücke werden nun in Gleichung (3.5) eingesetzt:

$$((I \otimes A)K + A \otimes I) \cdot \text{vec}(\Delta) = B_1 \cdot \text{vec}(\Delta) \quad (3.10)$$

Es ergibt sich  $B_1 = (I \otimes A)K + A \otimes I$  und mit  $C_1 = \text{vec}(\bar{\chi}_t^* | \Sigma_v)$  ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$B_1 \cdot \text{vec}(\Delta) = C_1 \quad (3.11)$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems ergibt sich die spaltenweise vektorisierte Form der Matrix  $\Delta$ . Jedoch ist mit dieser Lösung noch nicht sichergestellt, dass das Rauschen einen Mittelwert von 0 in jeder Komponente aufweist, wie es in den Annahmen des Kalman Filters festgelegt ist (vgl. Abschnitt 2.1). Hierfür muss die Summe aller Elemente jeder Zeile von  $\Delta$  den Wert 0 ergeben bzw. die Summe aller Spalten von  $\Delta$  muss den Nullvektor ergeben. Um dies sicherzustellen wird die folgende Nebenbedingung aufgestellt:

$$B_2 \cdot \text{vec}(\Delta) = C_2 \quad (3.12)$$

Hierbei ist  $C_2$  der Nullvektor und  $B_2 = E^T \otimes I$  mit dem Einsvektor  $E \in \mathbb{R}^q$  und der Einheitsmatrix  $I \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , wobei  $p$  die Zeilenanzahl und  $q$  die Spaltenanzahl von  $\Delta$  ist.

Nun kann  $\text{vec}(\Delta)$  durch Lösen des Gleichungssystems (3.9) mit  $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$  bestimmt werden und anschließend in die Matrix  $\Delta$  umgewandelt werden. Dies erfolgt mittels der Umkehrung der Vektorisierung, indem die Matrix  $\Delta$  spaltenweise aus der Lösung des Gleichungssystems aufgebaut wird.

Die aktualisierten Sigmapunkte zum Ende des Dynamikschritts werden ermittelt mit:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_t^{(i)} &= \bar{x}_t + A_{\{:,i\}} + \Delta_{\{:,i\}} \\ &= \bar{x}_t^{*(i)} + \Delta_{\{:,i\}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aus diesen Sigmapunkten oder alternativ aus Gleichung (3.3) kann nun die Kovarianz nach dem Dynamikschritt bestimmt werden.

### 3.3 Messung

Im Gegensatz zum UKF soll das Messmodell beim UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten auf jeden Sigmapunkt einzeln angewendet werden. Wird Gleichung (2.22) entsprechend angepasst, folgt somit

$$\chi_t^{(i)} = \bar{\chi}_t^{(i)} + K_t (z_t - \bar{z}_t^{(i)}) \quad (3.14)$$

Die Gleichungen (2.18) bis (2.21) bleiben hierbei unverändert. Nach dem Anwenden von Gleichung (3.14) soll die Kovarianz der Definition des UKF (Gleichung (2.23)) entsprechen. Dies wird im Folgenden überprüft. Hierfür wird die Kovarianz der Sigmapunkte  $\chi_t$  nach Gleichung (3.14) bestimmt:

$$\text{Cov}(\chi_t) = E((\chi_t - E(\chi_t))(\chi_t - E(\chi_t))^T)$$

Der Erwartungswert der aktualisierten Sigmapunten entspricht dabei Gleichung (2.22) und somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Cov(\chi_t) &= E \left( (\bar{\chi}_t + K_t(z_t - \bar{z}_t) - \bar{x}_t - K_t(z_t - \hat{z}_t)) (\bar{\chi}_t + K_t(z_t - \bar{z}_t) - \bar{x}_t - K_t(z_t - \hat{z}_t))^T \right) \\
&= E \left( ((\bar{\chi}_t - \bar{x}_t) - K_t(\bar{z}_t - \hat{z}_t)) ((\bar{\chi}_t - \bar{x}_t) - K_t(\bar{z}_t - \hat{z}_t))^T \right) \\
&= E \left( (\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)(\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)^T + K_t(\bar{z}_t - \hat{z}_t)(\bar{z}_t - \hat{z}_t)^T K_t^T - (\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)(\bar{z}_t - \hat{z}_t)^T K_t^T \right. \\
&\quad \left. - K_t(\bar{z}_t - \hat{z}_t)(\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)^T \right) \\
&= E \left( (\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)(\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)^T \right) + K_t E \left( (\bar{z}_t - \hat{z}_t)(\bar{z}_t - \hat{z}_t)^T \right) K_t^T - E \left( (\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)(\bar{z}_t - \hat{z}_t)^T \right) K_t^T \\
&\quad - K_t E \left( (\bar{z}_t - \hat{z}_t)(\bar{\chi}_t - \bar{x}_t)^T \right) \\
&= Cov(\bar{\chi}_t) + K_t Cov(\bar{z}_t) K_t^T - Cov(\bar{\chi}_t, \bar{z}_t) K_t^T - K_t Cov(\bar{\chi}_t, \bar{z}_t)^T
\end{aligned}$$

Nun wird  $\Sigma_t^{x,z} = K_t \Sigma_t^z = Cov(\bar{\chi}_t, \bar{z}_t)$  gemäß Gleichung (2.21) sowie  $\Sigma_t^z = Cov(\bar{z}_t) + \Sigma_w$  aus Gleichung (2.19) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
Cov(\chi_t) &= Cov(\bar{\chi}_t) + K_t(\Sigma_t^z - \Sigma_w)K_t^T - K_t \Sigma_t^z K_t^T - K_t (\Sigma_t^z)^T K_t^T \\
&= Cov(\bar{\chi}_t) + K_t \Sigma_t^z K_t^T - K_t \Sigma_w K_t^T - K_t (\Sigma_t^z + (\Sigma_t^z)^T) K_t^T \\
&= Cov(\bar{\chi}_t) + K_t \Sigma_t^z K_t^T - K_t \Sigma_w K_t^T - 2K_t \Sigma_t^z K_t^T \\
&= Cov(\bar{\chi}_t) - K_t \Sigma_t^z K_t^T - K_t \Sigma_w K_t^T
\end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck nun mit Gleichung (2.23), fällt auf, dass die Kovarianz der Sigmapunten nach diesem Messschritt um den Term  $K_t \Sigma_w K_t^T$  kleiner ist, als sie gemäß der Formeln des Messschritts des UKF sein muss. Um dies zu korrigieren, wird dieser Term so auf die Sigmapunten aufgeteilt, dass sich der Mittelwert nicht ändert und sich die gleiche Kovarianz ergibt, wie nach dem Messschritt des UKF. Dies erfolgt mit dem in Abschnitt 3.2 vorgestellten Verfahren durch Lösen des Gleichungssystems (3.9) mit  $C_1 = vec(K_t \Sigma_w K_t^T)$ . Zur Berechnung der Matrix  $B_1$  wird wie in Abschnitt 3.2 beschrieben vorgegangen, mit dem Unterschied, dass in Gleichung (3.1) entsprechend die Sigmapunten aus Gleichung (3.14) sowie deren Mittelwert verwendet werden.

Der Mittelwert und die Kovarianz des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten nach dem Messschritt kann nun wie folgt bestimmt werden:

$$x_t = \frac{1}{|\chi_t|} \sum_i \chi_t^{(i)} \quad (3.15)$$

$$\Sigma_t = \frac{1}{|\chi_t|} \sum_i (\chi_t^{(i)} - x_t)(\chi_t^{(i)} - x_t)^T \quad (3.16)$$

## 4 Szenario 1D

Für das erste Szenario zur Evaluation der verschiedenen Kalman Filter Varianten wird in diesem Kapitel zunächst ein vereinfachtes, eindimensionales Szenario betrachtet, in dem ein Ball unter dem Einfluss der Schwerkraft fällt und beim Auftreffen auf den Boden ohne Energieverlust wieder abprallt. Reibungseinflüsse werden in diesem Fall vernachlässigt, sodass die Dynamik ausschließlich durch die Gravitation und einen elastischen Stoß bestimmt ist. Dieses Szenario stellt ein Beispiel für ein hybrides, dynamisches System mit stetigen Bewegungsphasen (freier Fall) und unstetigen Ereignissen (Bodenaufprall mit Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit) dar. Die vollständige Implementierung in Python für dieses Kapitel ist in Anhang A: Datenträger einsehbar. Hierunter fallen sowohl die Simulationsumgebung, der Ball sowie die verschiedenen Kalman Filter Varianten.

### 4.1 Simulationsumgebung

Die Simulation des 1D-Falls wurde mithilfe der Python-Bibliothek „pygame“ realisiert, mit der die grafische Benutzeroberfläche erstellt wurde. Angezeigt werden hier der echte Ball, der als Referenz für die Bewertung der Filter dient, sowie die Schätzungen der verschiedenen Kalman Filter Varianten. Für die Filter, die auf dem UKF basieren, werden zusätzlich die Sigmapunkte angezeigt. Die Sigmapunkte werden zur besseren Übersicht kleiner dargestellt, aber weisen in der Implementierung der Modelle den gleichen Radius auf, wie der echte Ball. Zusätzlich wird für alle dargestellten Objekte deren Geschwindigkeit über einen Pfeil dargestellt. Rechts neben den Schätzungen der Filter wird zudem die Standardabweichung der Position als ein  $\pm 1\sigma$ -Intervall angezeigt. In Abbildung 7 ist die grafische Benutzeroberfläche dargestellt. In der Bildunterschrift ist ein Video verlinkt, in dem die Simulation ausgeführt wird. Die Parameter mit denen dies erfolgt entsprechen Parametersatz 1, der in der Auswertung definiert wird (vgl. Abschnitt 6.1.1).

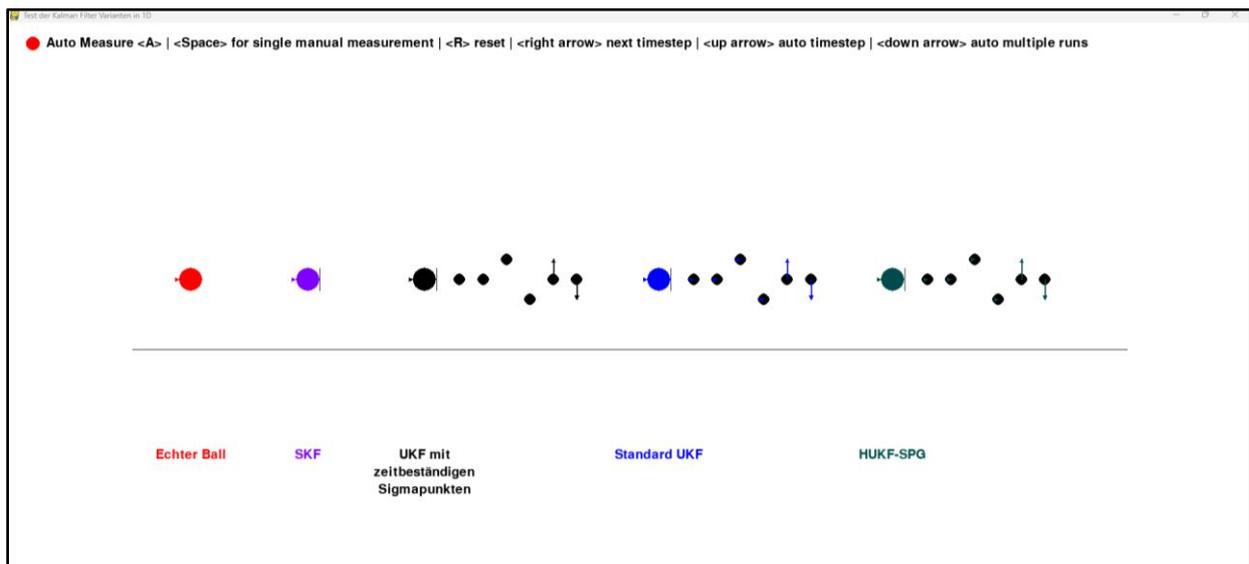


Abbildung 7: GUI für 1D Szenario (Video: <https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/4GAcfmyxyqSKrEz>)

Für die Implementierung der Modelle und Filter werden die Bibliotheken „Numpy“ und „Scipy“ verwendet. Numpy dient hierbei im Wesentlichen dem effizienten Umgang mit Vektoren und

Matrizen und Scipy wird zur numerischen Nullstellenbestimmung verwendet. Für die grafische Darstellung der aufgezeichneten Daten zwecks der Auswertung wird die Bibliothek „Matplotlib“ verwendet.

## 4.2 Modellierung des Systems

Das Dynamikmodell für das 1D-Szenario ist zugunsten einer besseren Nachvollziehbarkeit und übersichtlicheren Auswertung auf das Wesentliche reduziert, indem die einzige Kraft, die auf den Ball wirkt, die Gravitationskraft ist. Sämtliche anderen Reibungskräfte werden vernachlässigt. Auch beim Aufprall des Balls am Boden werden Verluste durch Reibung und Verformung vernachlässigt und lediglich die Geschwindigkeit des Balls umgekehrt. Das im folgenden erläuterte Dynamikmodell wird grundsätzlich von allen entwickelten Kalman Filter Varianten verwendet und je nach Bedarf an die Gegebenheiten des jeweiligen Filters angepasst (vgl. Abschnitt 4.3).

Für den Ball ergibt sich ein zweidimensionaler Zustand, bestehend aus der Position und der Geschwindigkeit:

$$x = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Bei dem betrachteten System handelt es sich um ein hybrides, dynamisches System wie in Abschnitt 2.2 beschrieben. Das System verfügt nur über einen Modus, da sich die Dynamik und die Domäne nicht verändern. Dementsprechend ist nur ein Modusübergang mit dazugehöriger Reset Map und Guard Map definiert. Da es nur einen Modus gibt, lässt sich dies in diesem konkreten Fall auch als Reinitialisierung interpretieren. Die Dynamik (Flow Map) für dieses System folgt der Differentialgleichung

$$f(x) = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ g \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

wobei  $g = -9,81 \frac{m}{s^2}$  die Konstante für die Erdbeschleunigung ist. Für die Anwendung in der Simulation und in den Kalman Filtern wird die zeitdiskrete Form

$$\begin{pmatrix} p_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{t-1} + v_{t-1}\Delta t \\ v_{t-1} + g\Delta t \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

mit dem Zeitschritt  $\Delta t$  verwendet. Der Modusübergang (bzw. die Reinitialisierung) wird durch die Guard Map

$$g(x) = p - r \leq 0 \quad (4.4)$$

initiiert, sobald der Ball am bzw. unterhalb des Bodens ist, wobei  $r$  der Radius des Balls ist. Ist die Bedingung der Guard Map erfüllt, wird die Reset Map

$$R(x) = \begin{pmatrix} r \\ -v \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

auf den Zustand angewendet, bei der das Vorzeichen der Geschwindigkeit umgekehrt wird und die Position auf den Wert des Radius gesetzt wird, sodass der Ball auf dem Boden aufliegt.

Das Messmodell für dieses Szenario ist ebenso wie das Dynamikmodell einfach gehalten. Es handelt sich um eine direkte Messung der Position des Balls. Dementsprechend lässt sich die Messung durch die Messfunktion

$$h(x) = p \quad (4.6)$$

beschreiben.

### 4.3 Kalman Filter Varianten

In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der verwendeten Varianten des Kalman Filters erläutert. Dabei werden hier explizit nur Abweichungen von den in Kapitel 2 vorgestellten Gleichungen und konkrete Rechnungen erläutert.

#### 4.3.1 Unscented Kalman Filter

Der Unscented Kalman Filter approximiert eine nichtlineare Zustandsverteilung mithilfe deterministisch gewählter Sigmapunkte, auf die das Dynamik- bzw. Messmodell angewendet werden, um anschließend aus diesen die resultierende Verteilung anzunähern (vgl. Abschnitt 2.1). Der UKF ist mit den zuvor beschriebenen Dynamik- und Messmodellen implementiert. Die einzige Ergänzung erfolgt im Messmodell, wo nach der Aktualisierung des Mittelwerts geprüft wird, ob sich dieser noch innerhalb der Domäne (also oberhalb des Bodens) befindet. Sollte dies nicht der Fall sein, wird der Ball auf dem Boden platziert. Zur Vereinfachung bleibt die Kovarianz bei diesem Eingriff unverändert, da die Annahme getroffen wird, dass diese Korrektur hinreichend klein ist.

#### 4.3.2 Salted Kalman Filter

Der Salted Kalman Filter erweitert den EKF um die Berücksichtigung unstetiger Modusübergänge mittels der Saltation-Matrix, die die Kovarianz über Dynamikgrenzen hinweg in linearer Näherung korrekt transformiert (vgl. Abschnitt 2.3). Wie bei einem EKF wird zunächst die Jacobi-Matrix des Dynamikmodells erstellt:

$$D_x f(x) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Für die Berechnung der Saltation-Matrix gemäß Gleichung (2.24) werden die Größen  $F_I^-, F_J^+, D_x R^-, D_x g^-, D_t R^-, D_t g^-$  benötigt, von denen die letzten beiden Jacobi-Matrizen ausschließlich Nullen enthalten, da die Reset Map und die Guard Map nicht von der Zeit abhängen. Für  $F_I^-$  wird das Dynamikmodell eingesetzt und bei der Bildung von  $F_J^+ := F_J(t^+, x(t^+))$  ist zu beachten, dass hier bereits die Zustandsvariablen eingesetzt werden, auf die bereits die Reset Map angewendet wurde. Für  $D_x R^-, D_x g^-$  werden die Reset Map und die Guard Map nach den Zustandsgrößen abgeleitet. Somit ergeben sich die Ausdrücke

$$F_I^- = \begin{pmatrix} v \\ g \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$F_J^+ = \begin{pmatrix} -v \\ g \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$D_x R^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$D_x g^- = (1 \quad 0) \quad (4.11)$$

mit denen die Saltation-Matrix wie folgt berechnet wird:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= D_x R^- + \frac{(F_J^+ - D_x R^- F_I^-) D_x g^-}{D_x g^- F_I^-} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\left( \begin{pmatrix} -v \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ g \end{pmatrix} \right) (1 \ 0)}{(1 \ 0) \begin{pmatrix} v \\ g \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\left( \begin{pmatrix} -v \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \right) (1 \ 0)}{v} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2\frac{g}{v} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2\frac{g}{v} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Durch die Ableitung des Messmodells ergibt sich die folgende Jacobi-Matrix:

$$D_x h(x) = (1 \ 0) \tag{4.13}$$

Auch für den SKF wird die Position des Balls wieder oberhalb des Bodens platziert, sofern dieser durch die Aktualisierung durch eine verrauschte Messung unterhalb platziert wird.

### 4.3.3 Hybrider Unscented Kalman Filter

Der Hybride Unscented Kalman Filter mit Sigmapunkt-Generierung kombiniert die Unscented Transformation mit einer expliziten Behandlung von Guard- und Reset-Bedingungen, um den Einfluss hybrider Dynamik abzubilden (vgl. Abschnitt 2.4) ist. Für den Dynamikschritt ergibt sich aus den Vorgaben des HUKF-SPG der Unterschied zum UKF, dass das Dynamikmodell so lange auf die Sigmapunkte angewendet wird, bis deren Mittelwert die Guardbedingung erfüllt. Aus diesem Grund unterscheidet sich das Dynamikmodell insofern, dass hier die Guard Map und die Reset Map nicht auf die Sigmapunkte angewendet werden. Es ist somit für einzelne Sigmapunkte nicht ausgeschlossen (und für das Erfüllen der Guardbedingung auch notwendig), dass sich diese unterhalb des Bodens befinden. Nachdem der Mittelwert die Guardbedingung erfüllt, wird die Kovarianz der Sigmapunkte berechnet und die Reset Map auf den Mittelwert angewendet. Ausgehend von dem neuen Mittelwert und der zuvor bestimmten Kovarianz werden neue Sigmapunkte generiert, auf die für den restlichen Zeitschritt das Dynamikmodell angewendet wird.

### 4.3.4 Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmapunkten

Der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten erweitert den UKF dadurch, dass die Sigmapunkte nicht in jedem Zeitschritt neu generiert werden, sondern über die Zeit hinweg erhalten bleiben. Die Implementierung erfolgt mit den oben beschriebenen Modellen gemäß den Erläuterungen und Gleichungen aus Kapitel 3.

## 5 Szenario 3D

In diesem Szenario wird die Bewegung eines Balls in einem dreidimensionalen Szenario modelliert und simuliert. Im Gegensatz zum vereinfachten 1D-Szenario, in dem ausschließlich Gravitation und elastische Bodenaufpralle berücksichtigt wurden, umfasst die 3D-Simulation ein deutlich komplexeres physikalisches Modell. Neben der Schwerkraft wirken nun auch aerodynamische Effekte wie Luftwiderstand und Magnus-Effekt auf die Bewegung ein und es wird ein Modell zur Beschreibung der Effekte beim Aufprall des Balls verwendet (vgl. Abschnitt 2.5).

Die Beobachtung der Bälle erfolgt durch zwei Kameras, die gemäß Abschnitt 2.6 implementiert werden. Durch einen hinreichenden Abstand der beiden Kameras wird eine Verbesserung der Schätzungen vor allem in der Tiefe (entlang der z-Achse der Kamera) erreicht.

Das System zeichnet sich durch eine hybride Dynamik mit stetigen Flugphasen und unstetigen Ereignissen im Moment des Aufpralls aus. Dies entspricht grundsätzlich der Dynamik des 1D Falls, jedoch wird hier eine realitätsnahe Modellierung des Systems vorgenommen und die hybride Dynamik findet nur in der z-Komponente des Systems statt. Die vollständige Implementierung in Python für dieses Kapitel ist in Anhang A: Datenträger einsehbar. Hierunter fallen sowohl die Simulationsumgebung, der Ball sowie die verschiedenen Kalman Filter Varianten.

### 5.1 Simulationsumgebung

Die 3D-Simulationsumgebung wurde in Python mit der 3D-Engine Panda3D implementiert. Es wird ein 3D-Modell des Balls gerendert, dessen Bewegung und Rotation durch das Dynamikmodell bestimmt wird. Für die Messung werden zwei virtuelle Kameras gemäß des projektiven Lochkameramodells mit radialer Verzerrung definiert (vgl. Abschnitt 2.6). Sowohl für den Ball als auch für die Schätzungen der Filter werden Trajektorien angezeigt, sodass die die Bewegung des Balls direkt mit den Schätzungen der Filter verglichen werden kann. Außerdem werden für die Filter, die auf dem UKF basieren, auch die Trajektorien der Sigmapunkte angezeigt. Diese werden zur besseren Unterscheidbarkeit zum Mittelwert blasser dargestellt. Auch für dieses Szenario werden die Daten aufgezeichnet und mit der Bibliothek „Matplotlib“ für eine Auswertung dargestellt. In Abbildung 1 (Abschnitt 1.2) ist die Simulationsumgebung mit dem Ball sowie einer Trajektorie dargestellt. Die dargestellte Trajektorie entspricht der, die auch für die Auswertung verwendet wird.

### 5.2 Modellierung des Systems

Für das Dynamikmodell des Systems wird die Flugphase des Balls sowie die Ereignisse des Aufpralls modelliert. Die zu schätzenden Parameter des Systems sind die Position, die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit des Balls. Somit ergibt sich der folgende neundimensionale Zustand

$$\mathbf{x} = (p_x \ p_y \ p_z \ v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T \quad (5.1)$$

Grundsätzlich gelten für die kontinuierliche Dynamik (Flow Map) des Balls die klassischen, zeit-diskreten Bewegungsgleichungen:

$$f(x) = \begin{pmatrix} p_t \\ v_t \\ \omega_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{t-1} + v_{t-1}t + \frac{1}{2}a(v_{t-1}, \omega_{t-1})t^2 \\ v_{t-1} + a(v_{t-1}, \omega_{t-1})t \\ \omega_{t-1} + \alpha(\omega_{t-1})t \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Die Beschleunigung aus setzt sich hierbei aus der Gravitationskonstanten, der Beschleunigung durch den Luftwiderstand und der Beschleunigung durch den Magnus-Effekt zusammen, die in Abschnitt 2.5.1 beschrieben sind. Für die Winkelbeschleunigung wird vereinfachend angenommen, dass diese in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit, des Luftreibungskoeffizienten  $\mu_L$  und des Radius  $r$  steht. Es ergeben sich somit die folgenden Beschleunigungen:

$$a(v, \omega) = g + a_{Luft} + a_{Magnus} \quad (5.3)$$

$$\alpha(\omega) = -\mu_L r \omega \quad (5.4)$$

Sollte in dem betrachteten Zeitschritt kein Aufprall erfolgen, wird für  $t$  die Länge eines Zeitschritts  $\Delta t$  eingesetzt, andernfalls die Zeit bis zum Aufprall  $t_0$ . Für den Fall, dass ein Aufprall erfolgt, werden die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit nach dem Aufprall wie in Abschnitt 2.5.2 berechnet. Es ergibt sich somit analog zum 1D-Fall die Reset Map

$$R(x) = \begin{pmatrix} (p_x \ p_y \ r)^T \\ A_v v + B_v \omega \\ A_\omega v + B_\omega \omega \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

zu der Guard Map

$$g(x) = p_z - r \leq 0 \quad (5.6)$$

Nach dem Aufprall wird das Dynamikmodell für den restlichen Zeitschritt angewendet. Für das Messmodell wird das Kameramodell aus Abschnitt 2.6 verwendet.

### 5.3 Kalman Filter Varianten

In diesem Abschnitt werden die eingesetzten Filtervarianten für das 3D-Szenario beschrieben. Die grundlegende Funktionsweise der Filter sowie der Messung mit der Kamera sind bereits in Kapitel 2 erläutert, deshalb werden in den folgenden Abschnitten nur die Unterschiede und Erweiterungen für die jeweiligen Implementierungen erläutert. Für die Generierung der Sigmapunkte wird ein Verfahren nach [Fre25] eingesetzt, bei dem nicht wie üblich zwei Sigmapunkte die Varianz in einer Dimension abbilden, sondern jeder Sigmapunkt einen Teil der Varianz aus jeder Dimension abbildet. Hieraus ergibt sich, dass alle Sigmapunkte in jeder Dimension der Kovarianz um den Faktor  $\sqrt{2}$  vom Mittelwert entfernt liegen und nicht wie normalerweise um den Faktor  $\sqrt{n+1}$ . Anschaulich bringt dies vor allem bei einer großen Anzahl an Dimensionen im Zustand den Vorteil mit sich, dass die Sigmapunkte nicht so weit auseinanderliegen, dass diese bereits bei der Generierung die Guardbedingung erfüllen, während der Mittelwert sich noch weit von der Dynamikgrenze entfernt befindet.

#### 5.3.1 Unscented Kalman Filter

Der UKF wird wie in Abschnitt 2.1 implementiert. Das Dynamikmodell entspricht den in Abschnitt 5.2 beschriebenen Gleichungen. Als Messmodell wird das in Abschnitt 2.6 dargestellte Kameramodell verwendet.

### 5.3.2 Salted Kalman Filter

Der SKF basiert wie in Abschnitt 2.3 beschrieben auf dem EKF und berücksichtigt hybride Übergänge mithilfe der Saltation-Matrix. Analog zum 1D-Szenario müssen auch für dieses Szenario die Jacobi-Matrix des Dynamik- und Messmodells sowie die Saltation-Matrix bestimmt werden.

#### Jacobi-Matrix des Dynamikmodells

Zur Ermittlung der Jacobi-Matrix wird das Dynamikmodell (Gleichung (5.2)) nach den Zustandsgrößen abgeleitet:

$$D_x f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t + \frac{1}{2}t^2 \frac{da_x}{dv_x} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_x}{dv_y} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_x}{dv_z} & 0 & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_x}{d\omega_y} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_x}{d\omega_z} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_y}{dv_x} & t + \frac{1}{2}t^2 \frac{da_y}{dv_y} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_y}{dv_z} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_y}{d\omega_x} & 0 & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_y}{d\omega_z} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_z}{dv_x} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_z}{dv_y} & t + \frac{1}{2}t^2 \frac{da_z}{dv_z} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_z}{d\omega_x} & \frac{1}{2}t^2 \frac{da_z}{d\omega_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + t \frac{da_x}{dv_x} & t \frac{da_x}{dv_y} & t \frac{da_x}{dv_z} & 0 & t \frac{da_x}{d\omega_y} & t \frac{da_x}{d\omega_z} \\ 0 & 0 & 0 & t \frac{da_y}{dv_x} & 1 + t \frac{da_y}{dv_y} & t \frac{da_y}{dv_z} & t \frac{da_y}{d\omega_x} & 0 & t \frac{da_y}{d\omega_z} \\ 0 & 0 & 0 & t \frac{da_z}{dv_x} & t \frac{da_z}{dv_y} & 1 + t \frac{da_z}{dv_z} & t \frac{da_z}{d\omega_x} & t \frac{da_z}{d\omega_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \mu_L r t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \mu_L r t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \mu_L r t \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Für die komponentenweisen Ableitungen der Beschleunigung wird zunächst die Beschleunigung komponentenweise aufgeschrieben:

$$a_x = -k v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + q(-v_y \omega_z + v_z \omega_y) \quad (5.8)$$

$$a_y = -k v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + q(-v_z \omega_x + v_x \omega_z) \quad (5.9)$$

$$a_z = g_z - k v_z \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} + q(-v_x \omega_y + v_y \omega_x) \quad (5.10)$$

Dabei sind  $k = \frac{1}{2m} \rho r^2 \pi c_D$  und  $q = \frac{1}{2m} \rho r^3 \pi c_S$  die Koeffizienten aus den Beschleunigungsgleichung in Abschnitt 2.5.1. Aus diesen lassen sich die komponentenweisen Ableitungen bestimmen:

$$\frac{da_x}{dv_x} = -\frac{k v_x^2}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - k \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (5.11)$$

$$\frac{da_x}{dv_y} = -\frac{k v_x v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - q \omega_z \quad (5.12)$$

$$\frac{da_x}{dv_z} = -\frac{k v_x v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - q \omega_y \quad (5.13)$$

$$\frac{da_x}{d\omega_y} = q v_z \quad (5.14)$$

$$\frac{da_x}{d\omega_z} = -q v_y \quad (5.15)$$

$$\frac{da_y}{dv_x} = -\frac{k v_y v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - q \omega_z \quad (5.16)$$

$$\frac{da_y}{dv_y} = -\frac{k v_y^2}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - k \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (5.17)$$

$$\frac{da_y}{dv_z} = -\frac{kv_y v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - q\omega_x \quad (5.18)$$

$$\frac{da_y}{d\omega_x} = -qv_z \quad (5.19)$$

$$\frac{da_y}{d\omega_z} = qv_x \quad (5.20)$$

$$\frac{da_z}{dv_x} = -\frac{kv_z v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - q\omega_y \quad (5.21)$$

$$\frac{da_z}{dv_y} = -\frac{kv_z v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - q\omega_x \quad (5.22)$$

$$\frac{da_z}{dv_z} = -\frac{kv_z^2}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - k\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (5.23)$$

$$\frac{da_z}{d\omega_x} = qv_y \quad (5.24)$$

$$\frac{da_z}{d\omega_y} = -qv_x \quad (5.25)$$

### Saltation Matrix

Für die Berechnung der Saltation-Matrix gemäß Gleichung (2.24) werden die Größen  $F_I^-, F_J^+, D_x R^-, D_x g^-, D_t R^-, D_t g^-$  benötigt, von denen die letzten beiden Jacobi-Matrizen ausschließlich Nullen enthalten, da die Reset Map und die Guard Map nicht von der Zeit abhängen. Dabei entspricht  $F_I^-$  dem Dynamikmodell aus Gleichung (5.2) als Differentialgleichung:

$$F_I^- = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ a(v, \omega) \\ \alpha(\omega) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Auch hier gilt der Zusammenhang  $\alpha(\omega) = -\mu_L r \omega$ . Für die Dynamik nach dem Aufprall ergibt sich analog

$$F_I^+ = \begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \dot{v}' \\ \dot{\omega}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' \\ a(v', \omega') \\ \alpha(\omega') \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

wobei die einfach gestrichelten Größen die Größen nach dem Aufprall repräsentieren. Die Reset Map und die Guard Map entsprechen den Gleichungen (5.5) und (5.6). Für die Jacobi-Matrix der Guard Map ergibt sich analog zum 1D-Szenario:

$$D_x g^- = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (5.28)$$

Für die Berechnung der Jacobi-Matrix der Reset Map müssen die Fälle des rutschenden und rollenden Kontakts unterschieden werden (vgl. Abschnitt 2.5.2). Für den rutschenden Kontakt ergibt sich für die Reset Map aus Gleichung (5.5) durch Einsetzen der Matrizen aus Abschnitt 2.5.2 die folgende Reset Map:

$$R_S(x) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ r \\ (1 - \alpha)v_x + \alpha r \omega_y \\ (1 - \alpha)v_y + \alpha r \omega_x \\ -e_{cor} v_z \\ -\frac{3\alpha}{2r} v_y + \left(1 - \frac{3\alpha}{2}\right) \omega_x \\ \frac{3\alpha}{2r} v_x + \left(1 - \frac{3\alpha}{2}\right) \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Die Jacobi-Matrix dieser Reset Map lautet wie folgt:

$$D_x R_S(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 & r_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{cor} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{16} & r_{17} & r_{18} & r_{19} & r_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Die Einträge  $r_1$  bis  $r_{20}$  sind dabei folgendermaßen zu ermitteln:

$$r_1 = 1 - \alpha + \frac{d\alpha}{dv_x} (r\omega_y - v_x) \quad (5.31)$$

$$r_2 = \frac{d\alpha}{dv_y} (r\omega_y - v_x) \quad (5.32)$$

$$r_3 = \frac{d\alpha}{dv_z} (r\omega_y - v_x) \quad (5.33)$$

$$r_4 = \frac{d\alpha}{d\omega_x} (r\omega_y - v_x) \quad (5.34)$$

$$r_5 = \alpha r + \frac{d\alpha}{d\omega_y} (r\omega_y - v_x) \quad (5.35)$$

$$r_6 = -\frac{d\alpha}{dv_x} (r\omega_x + v_y) \quad (5.36)$$

$$r_7 = 1 - \alpha - \frac{d\alpha}{dv_y} (r\omega_x + v_y) \quad (5.37)$$

$$r_8 = -\frac{d\alpha}{dv_z} (r\omega_x + v_y) \quad (5.38)$$

$$r_9 = -\alpha r - \frac{d\alpha}{d\omega_x} (r\omega_x + v_y) \quad (5.39)$$

$$r_{10} = -\frac{d\alpha}{d\omega_y} (r\omega_x + v_y) \quad (5.40)$$

$$r_{11} = -\frac{d\alpha}{dv_x} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_y + \omega_x \right) \quad (5.41)$$

$$r_{12} = -\frac{d\alpha}{dv_y} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_y + \omega_x \right) - \frac{3\alpha}{2r} \quad (5.42)$$

$$r_{13} = -\frac{d\alpha}{dv_z} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_y + \omega_x \right) \quad (5.43)$$

$$r_{14} = -\frac{d\alpha}{d\omega_x} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_y + \omega_x \right) + 1 - \frac{3\alpha}{2} \quad (5.44)$$

$$r_{15} = -\frac{d\alpha}{d\omega_y} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_y + \omega_x \right) \quad (5.45)$$

$$r_{16} = \frac{d\alpha}{dv_x} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_x + \omega_y \right) + \frac{3\alpha}{2r} \quad (5.46)$$

$$r_{17} = \frac{d\alpha}{dv_y} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_x + \omega_y \right) \quad (5.47)$$

$$r_{18} = \frac{d\alpha}{dv_z} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_x + \omega_y \right) \quad (5.48)$$

$$r_{19} = \frac{d\alpha}{d\omega_x} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_x + \omega_y \right) \quad (5.49)$$

$$r_{20} = \frac{d\alpha}{d\omega_x} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{r} v_x + \omega_y \right) + 1 - \frac{3\alpha}{2} \quad (5.50)$$

Die hierfür benötigten Ableitungen von  $\alpha = \mu_G (1 + e_{cor}) \frac{|v_z|}{\|v_T\|}$  (vgl. Gleichung (2.37)) nach den Zustandsvariablen lauten wie folgt:

$$\frac{d\alpha}{dv_x} = -\frac{\mu_G (1 + e_{cor}) |v_z| (v_x - r\omega_y)}{\sqrt{(v_x - r\omega_y)^2 + (v_y - r\omega_x)^2}^3} \quad (5.51)$$

$$\frac{d\alpha}{dv_y} = -\frac{\mu_G (1 + e_{cor}) |v_z| (v_y + r\omega_x)}{\sqrt{(v_x - r\omega_y)^2 + (v_y - r\omega_x)^2}^3} \quad (5.52)$$

$$\frac{d\alpha}{dv_z} = \frac{\mu_G (1 + e_{cor})}{\sqrt{(v_x - r\omega_y)^2 + (v_y - r\omega_x)^2}} \cdot \frac{v_z}{|v_z|} \quad (5.53)$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega_x} = -\frac{\mu_G (1 + e_{cor}) |v_z| (v_y + r\omega_x) r}{\sqrt{(v_x - r\omega_y)^2 + (v_y - r\omega_x)^2}^3} \quad (5.54)$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega_y} = \frac{\mu_G (1 + e_{cor}) |v_z| (v_x - r\omega_y) r}{\sqrt{(v_x - r\omega_y)^2 + (v_y - r\omega_x)^2}^3} \quad (5.55)$$

Für den rollenden Kontakt ergibt sich für die Reset Map aus Gleichung (5.5) durch Einsetzen der Matrizen aus Abschnitt 2.5.2 die Reset Map

$$R_R(x) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ r \\ \frac{3}{5} v_x + \frac{2r}{5} \omega_y \\ \frac{3}{5} v_y - \frac{2r}{5} \omega_x \\ -e_{cor} v_z \\ -\frac{3}{5r} v_y + \frac{2}{5} \omega_x \\ \frac{3}{5r} v_x + \frac{2}{5} \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (5.56)$$



$$\Xi_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{v_z}(v'_x - v_x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{v_z}(v'_y - v_y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_z}v'_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_z}\left(a'_x - \frac{3}{5}a_x - \frac{2r}{5}\mu_L r\omega_y\right) & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2r}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_z}\left(a'_y - \frac{3}{5}a_y - \frac{2r}{5}\mu_L r\omega_x\right) & 0 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2r}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_z}(a'_z - e_{cor}a_z) & 0 & 0 & -e_{cor} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_z}\left(\mu_L r\omega'_x - \frac{3}{5r}a_y - \frac{2}{5}\mu_L r\omega_x\right) & 0 & -\frac{3}{5r} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\mu_L r\omega'_y - \frac{3}{5r}a_x - \frac{2}{5}\mu_L r\omega_y\right) & \frac{3}{5r} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_z}\mu_L r(\omega'_z - \omega_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

### Jacobi-Matrix des Messmodells

Für die Jacobi-Matrix des Messmodells wird die Kameragleichung (2.42) nach den Zustandsgrößen abgeleitet. Da es sich bei der Messung um einen zweidimensionalen Vektor und beim Zustand um einen neundimensionalen Vektor handelt, ist das Ergebnis eine Jacobi-Matrix mit zwei Zeilen und neun Spalten, von denen jedoch die letzten sechs Spalten ausschließlich Nullen als Einträge haben, da das Ergebnis der Kameragleichung nur von der Position des Balls und nicht von dessen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit abhängt. Es wird im Folgenden somit nur die ersten drei Spalten dieser Matrix betrachtet. Diese Untermatrix wird durch Ableitung der Kameragleichung mittels der Kettenregel ermittelt:

$$\frac{dp_B}{dx} = \frac{dp_B}{d\tilde{p}_B} \frac{d\tilde{p}_B}{d\bar{p}_B} \frac{d\bar{p}_B}{dp_C} \frac{dp_C}{dx} \quad (5.61)$$

Die einzelnen Faktoren entsprechen dabei den Ableitungen der Gleichungen (2.39) bis (2.42). Somit ergeben sich

$$\frac{dp_B}{d\tilde{p}_B} = \lambda \quad (5.62)$$

$$\frac{d\tilde{p}_B}{d\bar{p}_B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

$$\frac{d\bar{p}_B}{dp_C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{p_{C,x}}{p_{C,z}^2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{p_{C,y}}{p_{C,z}^2} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

$$\frac{dp_C}{dx} = T_{C \leftarrow W} \quad (5.65)$$

mit

$$a = 1 + 3\kappa_1\bar{p}_{B,x}^2 + \kappa_1\bar{p}_{B,y}^2 + 5\kappa_2\bar{p}_{B,x}^4 + \kappa_2 6\bar{p}_{B,x}^2\bar{p}_{B,y}^2 + \kappa_2\bar{p}_{B,y}^4 \quad (5.66)$$

$$b = \kappa_1 2\bar{p}_{B,x}\bar{p}_{B,y} + \kappa_2 4\bar{p}_{B,x}^3\bar{p}_{B,y} + \kappa_2 4\bar{p}_{B,y}^3\bar{p}_{B,x} \quad (5.67)$$

$$c = \kappa_1 2\bar{p}_{B,x}\bar{p}_{B,y} + \kappa_2 4\bar{p}_{B,x}^3\bar{p}_{B,y} + \kappa_2 4\bar{p}_{B,y}^3\bar{p}_{B,x} \quad (5.68)$$

$$d = 1 + 3\kappa_1\bar{p}_{B,y}^2 + \kappa_1\bar{p}_{B,x}^2 + 5\kappa_2\bar{p}_{B,y}^4 + \kappa_2 6\bar{p}_{B,x}^2\bar{p}_{B,y}^2 + \kappa_2\bar{p}_{B,x}^4 \quad (5.69)$$

### 5.3.3 Hybrider Unscented Kalman Filter

Der Hybride Unscented Kalman Filter mit Sigmapunkt-Generierung kombiniert die Unscented Transformation mit einer expliziten Behandlung von Guard- und Reset-Bedingungen, um den Einfluss hybrider Dynamik abzubilden (vgl. Abschnitt 2.4) ist. Für den Dynamikschritt ergibt sich aus den Vorgaben des HUKF-SPG der Unterschied zum UKF, dass das Dynamikmodell so lange auf die Sigmapunkte angewendet wird, bis deren Mittelwert die Guardbedingung erfüllt. Aus diesem Grund unterscheidet sich das Dynamikmodell insofern, dass hier die Guard Map und die Reset Map nicht auf die Sigmapunkte angewendet werden. Es ist somit für einzelne Sigmapunkte nicht ausgeschlossen (und für das Erfüllen der Guardbedingung auch notwendig), dass sich diese unterhalb des Bodens befinden. Nachdem der Mittelwert die Guardbedingung erfüllt, wird die Kovarianz der Sigmapunkte berechnet und die Reset Map auf den Mittelwert angewendet. Ausgehend von dem neuen Mittelwert und der zuvor bestimmten Kovarianz werden neue Sigmapunkte generiert, auf die das Dynamikmodell für den restlichen Zeitschritt angewendet wird.

### 5.3.4 Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmapunkten

Der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten wird wie in Kapitel 3 erläutert umgesetzt. Auch hier werden die Sigmapunkte nicht in jedem Zeitschritt neu generiert, sondern über die gesamte Simulation hinweg beibehalten.

## 5.4 Beispielhafter Simulationsdurchgang

In diesem Abschnitt wird für jeden Filter ein beispielhafter Simulationsdurchgang zur Veranschaulichung dargestellt. Die Parameter hierfür entsprechen Parametersatz 1 aus der Auswertung (vgl. Abschnitt 6.2.1). Hierbei werden die Trajektorien der Positionsschätzungen der Filter und sofern vorhanden auch die Trajektorien der Sigmapunkte der Filter dargestellt. Die Sigmapunkte werden in der Farbe der Positionsschätzung dargestellt, jedoch sind diese blasser. Die Trajektorie des echten Balls wird in rot dargestellt. Unter jeder Abbildung befindet sich ein Link zu einem Video zu dem entsprechenden Simulationsdurchgang.

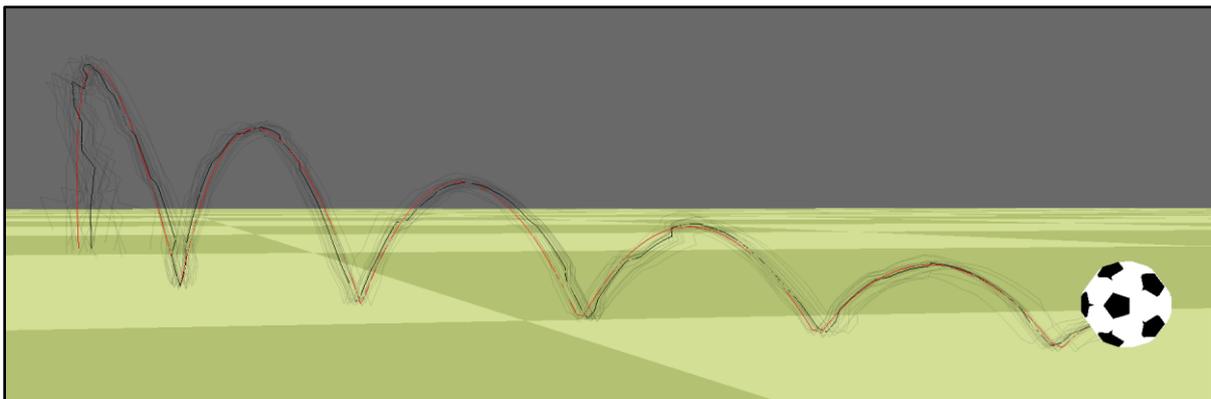


Abbildung 8: Demo 3D-Szenario: UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Video: <https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/p78zZr4WySikd8r>)

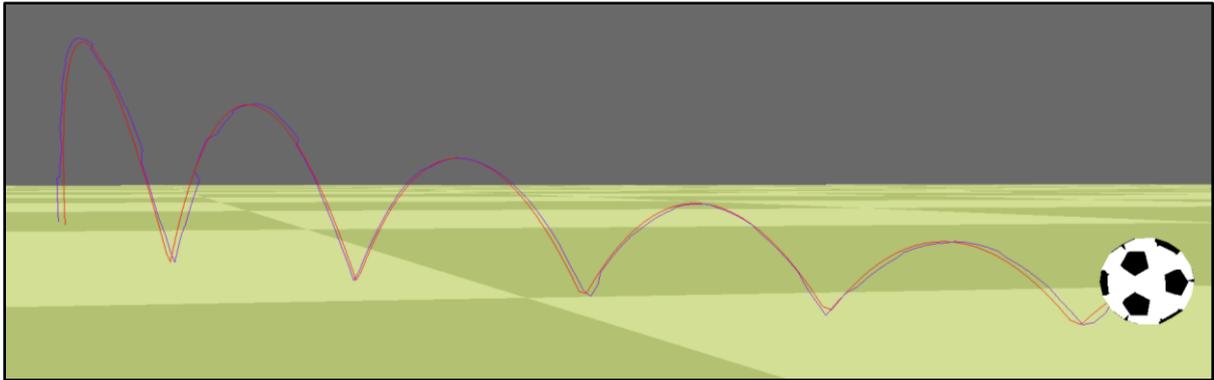


Abbildung 9: Demo 3D-Szenario: SKF (Video: <https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/cbF4FgPa2rWpKMy>)

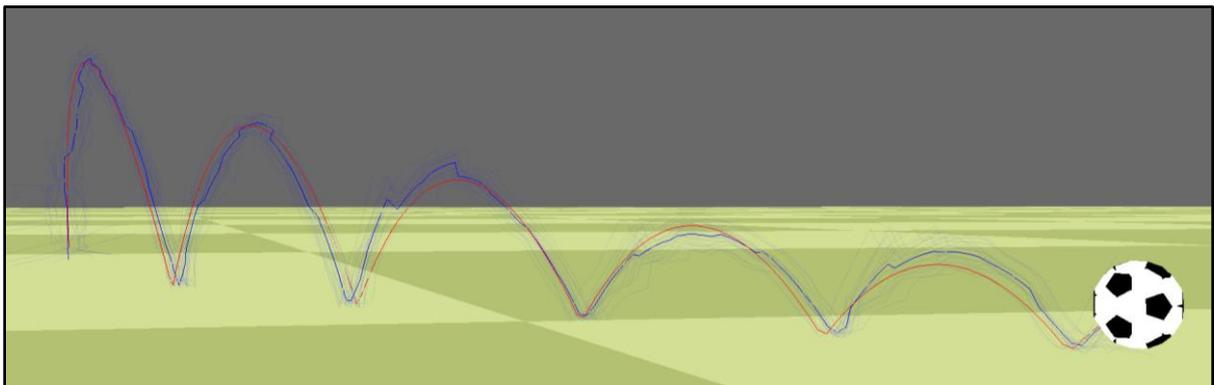


Abbildung 10: Demo 3D-Szenario: UKF (Video: <https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/n3LCY9CW7f7TmRN>)

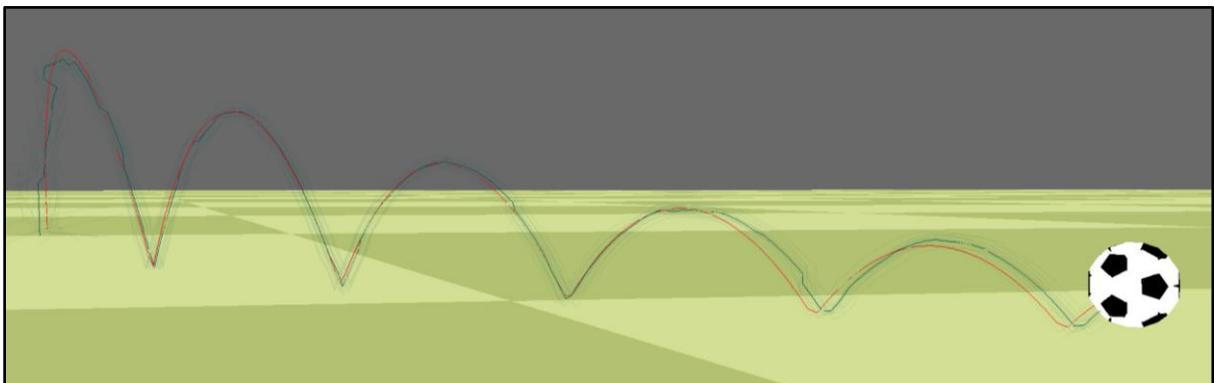


Abbildung 11: Demo 3D-Szenario: HUKF-SPG (Video: <https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/cXjkbwr58kzQ4sX>)

## 6 Auswertung

In diesem Kapitel werden die betrachteten Szenarien (1D und 3D) ausgewertet. Als Metriken zur Bewertung der verschiedenen Kalman Filter Varianten werden der absolute Fehler der Position und Geschwindigkeit sowie die Konsistenz der Filter verwendet. Die Konsistenz ist dabei der Mittelwert der quadrierten Mahalanobis-Distanz und wie folgt definiert:

$$\frac{1}{T} \sum_t^T (x_t - \hat{x}_t)^T \Sigma_t^{-1} (x_t - \hat{x}_t) \quad (6.1)$$

Dabei sind  $x_t$  und  $\Sigma_t$  der Zustandsvektor und die Kovarianzmatrix des jeweiligen Filters und  $\hat{x}_t$  der Zustandsvektor des echten Balls. Der Erwartungswert dieser Größe entspricht der Anzahl der Zustandsvariablen. Somit gilt für einen Filter für das 1D-Szenario, dass die Konsistenz den Erwartungswert 2 aufweist und für das 3D-Szenario den Erwartungswert 9. Anschaulich ist diese Metrik so zu interpretieren, dass ein Wert oberhalb des Erwartungswerts bedeutet, dass der Filter eine Unsicherheit seiner Schätzung annimmt, die in Bezug auf die Abweichung zum korrekten Wert zu klein ist. Umgekehrt lässt ein Wert unterhalb des Erwartungswerts auf eine eher große Unsicherheit in Bezug auf die Abweichung zum korrekten Wert schließen.

Beide Metriken werden während der Simulation ermittelt. Die Ergebnisse werden in den folgenden Abschnitten dargestellt. Hierbei werden alle Filter bei jedem Durchgang mit denselben Werten initialisiert und unter identischen Umgebungsbedingungen (Reibungskoeffizienten, Messrauschen, etc.) und mit denselben Messwerten getestet, sodass die Werte stets vergleichbar sind. Für die Ermittlung der Konsistenz und der absoluten Abweichungen wird die Simulation mehrfach wiederholt und die Daten tabellarisch dargestellt und ausgewertet. Um die Ergebnisse der Simulation im Detail qualitativ betrachten zu können, wird ein repräsentativer Durchgang ausgewählt und die relevanten Werte grafisch dargestellt. Für den Umgang mit Ausreißern wird ausgenutzt, dass die quadrierte Mahalanobis-Distanz einer Chi-Quadrat-Verteilung folgt. Dies geht direkt aus der Definition der Chi-Quadrat-Verteilung hervor. Mahalanobis-Distanzen, die außerhalb des 0,1%-Quantils der Chi-Quadrat-Verteilung liegen, werden nicht berücksichtigt, sondern durch diesen Grenzwert ersetzt. Für den 1D-Fall betrifft dies Mahalanobis-Distanzen, die größer als 13,82 sind, und für den 3D-Fall sind Mahalanobis-Distanzen größer als 27,88 betroffen. Dieses Verfahren wurde gewählt, da mitunter Werte für die Mahalanobis-Distanz auftreten, die die Konsistenz unbrauchbar machen.

### 6.1 Szenario 1D

Für die Auswertung des 1D-Falls werden zunächst die Konsistenz der Filter sowie die absoluten Abweichungen der Position und der Geschwindigkeit quantitativ untersucht. Anschließend wird ein repräsentativer Simulationsdurchgang genutzt, um eine qualitative Auswertung vorzunehmen, bei der auf Besonderheiten der verschiedenen Filter eingegangen wird.

#### 6.1.1 Quantitative Auswertung

Um die verschiedenen Filter quantitativ auswerten zu können, wurde die Simulation 50-mal wiederholt. Aus den aufgezeichneten Daten der Mahalanobis-Distanz sowie den Positions-

und Geschwindigkeitsfehlern wurden der Mittelwert und die Standardabweichung ermittelt. Bei den Mahalanobis-Distanzen wurden die Ausreißer wie in Abschnitt 6 beschrieben korrigiert. Außerdem wurde die Simulation für die Auswertung mit verschiedenen Parametern ausgeführt. Dafür wurden verschiedene Werte für das Rauschen im Dynamik- und Messschritt sowie verschiedene Intervalle zwischen den Messungen verwendet. Es wurden die folgenden Parametersätze getestet:

- Parametersatz 1:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,05 \frac{m}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 0,2m$
  - Messungen in jedem Schritt
- Parametersatz 2:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,1 \frac{m}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 0,2m$
  - Messungen in jedem Schritt
- Parametersatz 3:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,05 \frac{m}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 0,4m$
  - Messungen in jedem Schritt
- Parametersatz 4:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,05 \frac{m}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 0,2m$
  - Messungen in jedem fünften Schritt

Die Startwerte des Zustands und der Kovarianzmatrix sind für alle Parametersätze identisch. Der echte Ball mit einem Radius von  $1m$  auf einer Position von  $6m$  mit einer Geschwindigkeit von  $0 \frac{m}{s}$  platziert und alle Filter mit diesen Werten initialisiert. Die Varianz der Position beträgt hierbei  $(1m)^2$  und die Varianz der Geschwindigkeit  $(1 \frac{m}{s})^2$ . Die Simulation erfolgt mit 60 Bildern bzw. Schritten pro Sekunde. Die Dauer eines Zeitschritts beträgt somit  $\frac{1}{60}s$ .

Die Ergebnisse dieser Tests sind in Tabelle 1 aufgeführt und zeigen, dass der SKF in den meisten Fällen die kleinsten absoluten Positions- und Geschwindigkeitsfehler produziert, wobei auch die Werte des HUKF-SPG ähnlich kleine Werte aufweisen. Die Positions- und Geschwindigkeitsfehler des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten sind zwischen 20% und 50% größer als die des SKF. Der UKF liefert in allen betrachteten Fällen die größten absoluten Positions- und Geschwindigkeitsfehler, wobei die Positionsfehler zwischen 40% und 100% größer sind als die des SKF und die Geschwindigkeitsfehler etwa 2,5-mal größer sind. Anhand der Konsistenz lässt sich erkennen, dass der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten, der SKF und der UKF dazu neigen, die Unsicherheit ihrer Schätzungen zu überschätzen, da die Konsistenzen unterhalb des Erwartungswerts von 2 liegen. Der HUKF-SPG weist hingegen Konsistenzen etwas oberhalb des Erwartungswerts von 2 auf, was darauf schließen lässt, dass dieser die Unsicherheit seiner Schätzung zu gering einschätzt.

Parametersatz Nr.	Kalman Filter	Konsistenz [1]		Positionsfehler [mm]		Geschwindigkeitsfehler [mm/s]	
		MW	STD	MW	STD	MW	STD
1	UKF m. zeitbest. SP	<b>1,761</b>	<b>0,522</b>	34,015	5,243	133,245	32,009
	SKF	1,251	0,422	<b>27,817</b>	<b>4,203</b>	<b>93,472</b>	<b>30,846</b>
	Standard UKF	1,610	0,444	45,028	5,179	243,922	43,213
	HUKF-SPG	2,323	0,707	29,547	5,488	101,287	39,906
2	UKF m. zeitbest. SP	1,604	0,400	37,547	5,067	144,161	24,728
	SKF	1,180	0,238	32,812	3,549	<b>98,582</b>	<b>28,541</b>
	Standard UKF	1,428	0,265	46,035	4,967	245,455	34,713
	HUKF-SPG	<b>1,711</b>	<b>0,375</b>	<b>32,646</b>	<b>3,840</b>	100,742	31,617
3	UKF m. zeitbest. SP	2,421	1,085	65,673	12,371	221,397	42,558
	SKF	1,338	0,574	<b>47,491</b>	<b>9,010</b>	<b>146,520</b>	<b>40,353</b>
	Standard UKF	<b>1,808</b>	<b>0,543</b>	88,120	10,137	400,542	46,641
	HUKF-SPG	3,295	1,121	54,719	13,599	170,967	58,792
4	UKF m. zeitbest. SP	1,449	0,797	58,009	13,648	216,238	49,069
	SKF	1,344	0,738	<b>49,664</b>	<b>12,698</b>	<b>162,323</b>	<b>67,489</b>
	Standard UKF	<b>1,741</b>	<b>0,656</b>	96,685	13,352	436,037	63,423
	HUKF-SPG	3,661	1,499	60,237	15,875	198,208	78,729

Tabelle 1: Konsistenz, Positions- und Geschwindigkeitsfehler im 1D-Szenario nach 50 Durchgängen

### 6.1.2 Qualitative Auswertung

Für die qualitative Auswertung werden die Parameter wie in Parametersatz 1 aus Abschnitt 6.1.1 gewählt und die Ergebnisse aus einem Durchgang grafisch dargestellt. Hierbei werden die Verläufe der Position, der Geschwindigkeit, der Konsistenz sowie des Positions- und des Geschwindigkeitsfehlers betrachtet. Der Wert, ab dem Mahalanobis-Distanzen als Ausreißer behandelt werden, ist mit einer horizontalen roten Linie gekennzeichnet.

#### 6.1.2.1 Position

Für die qualitative Auswertung der Positionsschätzungen der verschiedenen Filtervarianten wird in Abbildung 12 bis Abbildung 15 jeweils der Schätzwert der Position mit einem  $\pm 1 \sigma$ -Intervall und die Referenzposition des echten Balls grafisch dargestellt. Zusätzlich wird auch der Wert der Standardabweichung dargestellt. Darauf folgen Abbildung 16 bis Abbildung 19, in denen der absolute Positionsfehler (Betrag der Differenz des echten Wertes und der Schätzung) sowie die Standardabweichung der Position dargestellt sind.

Zwischen den Positionsschätzungen der verschiedenen hybriden Kalman Filter Varianten ist anhand der Abbildungen kein nennenswerter Unterschied erkennbar. Beim UKF ist zu erkennen, dass dessen Standardabweichung der Positionsschätzung nach jedem Aufprall am Boden stark ansteigt. Anschaulich ergibt das Sinn, da der UKF nicht mit vernünftig mit den Unstetigkeiten in den Momenten des Aufpralls umgehen kann und immer, wenn ein solches „unerwartetes“ Ereignis auftritt, die Unsicherheit erhöht. Bei den Abbildungen mit den Positionsfehlern sind qualitativ keine nennenswerten Unterschiede festzustellen.

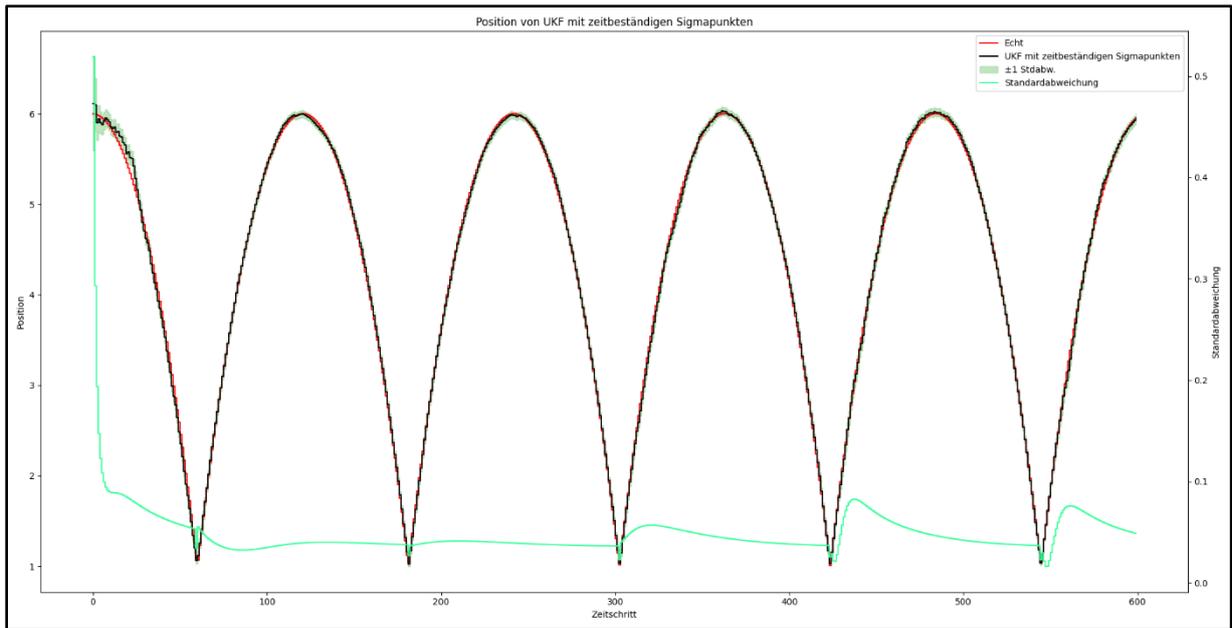


Abbildung 12: Position UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D)

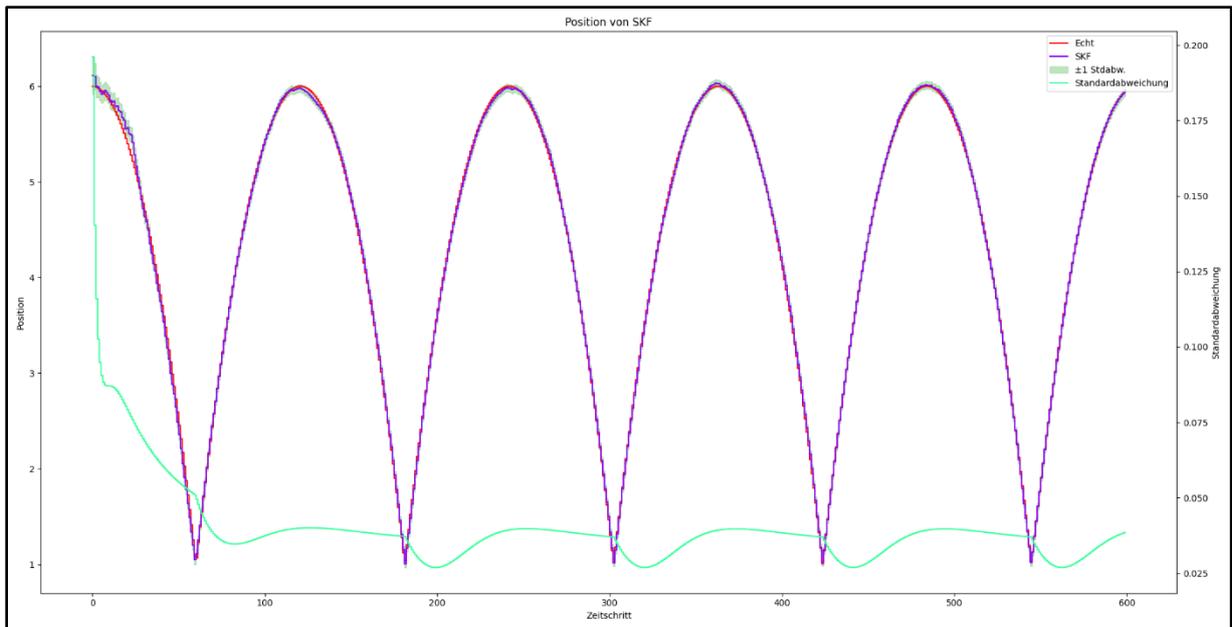


Abbildung 13: Position SKF (Szenario 1D)

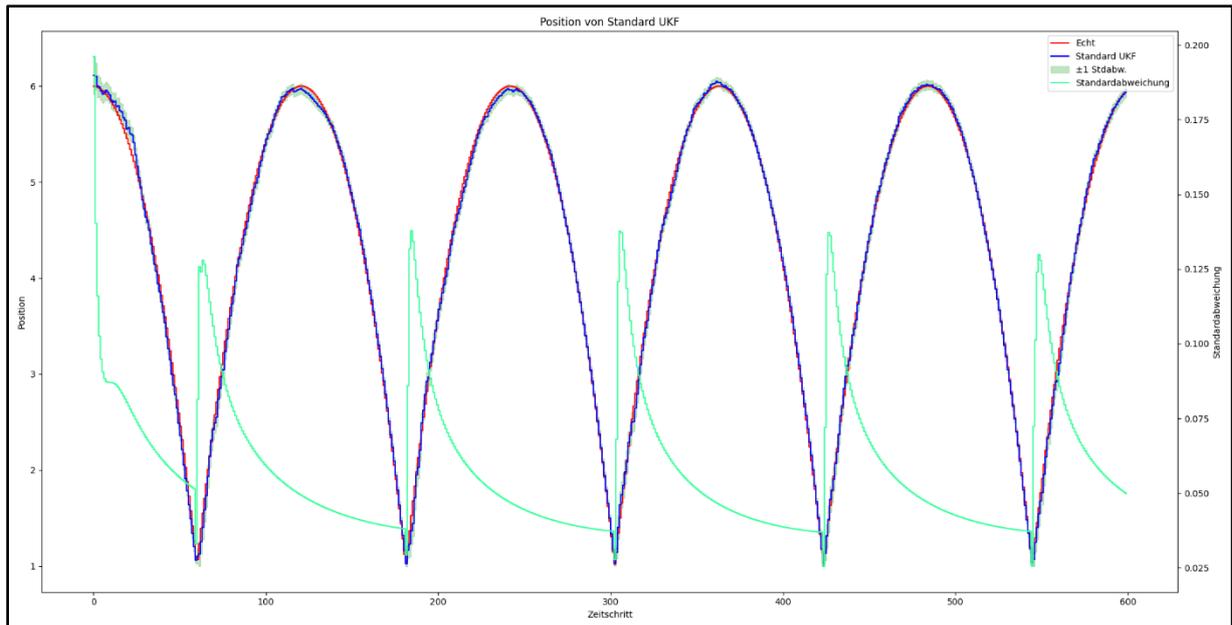


Abbildung 14: Position UKF (Szenario 1D)

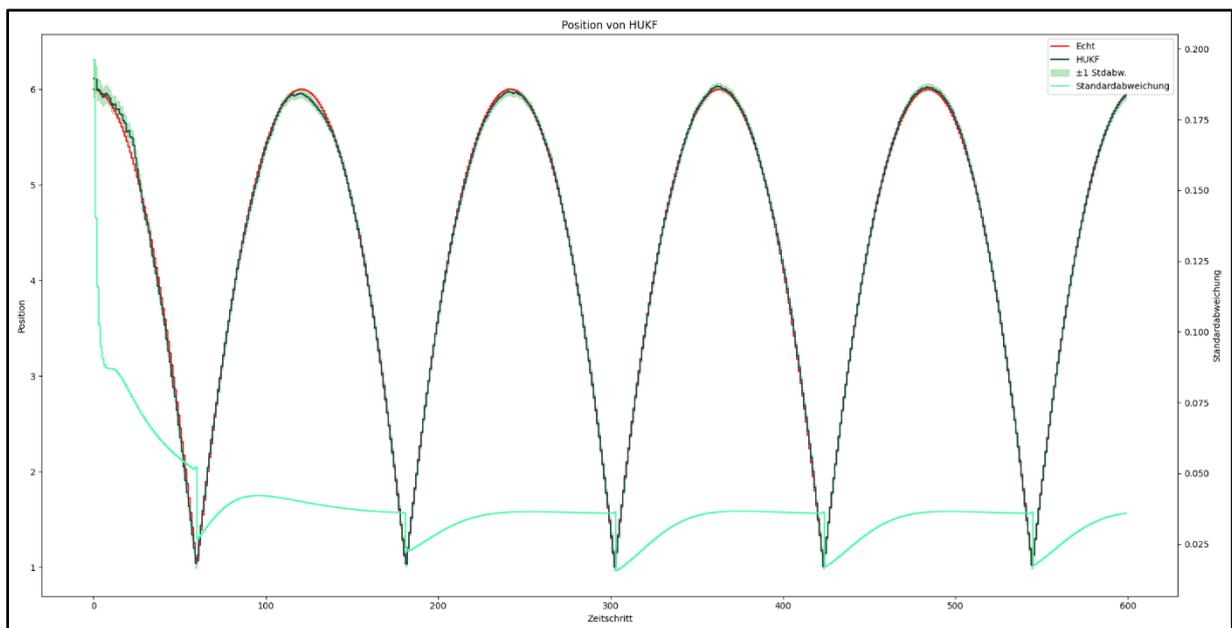


Abbildung 15: Position HUKF-SPG (Szenario 1D)

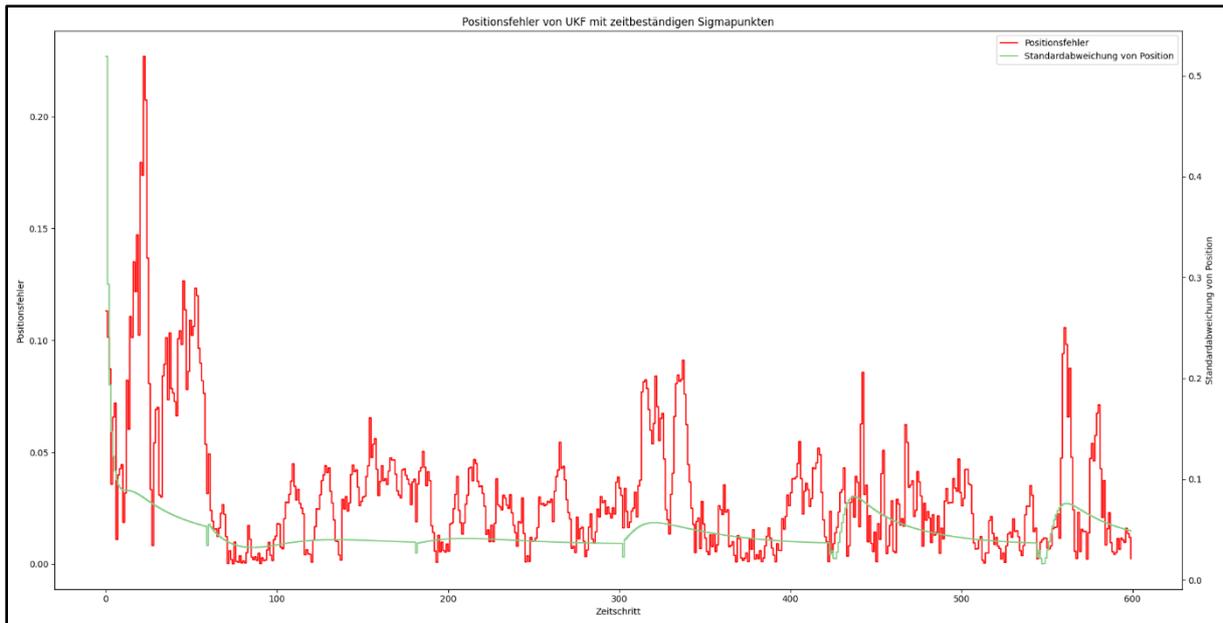


Abbildung 16: Positionenfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D)

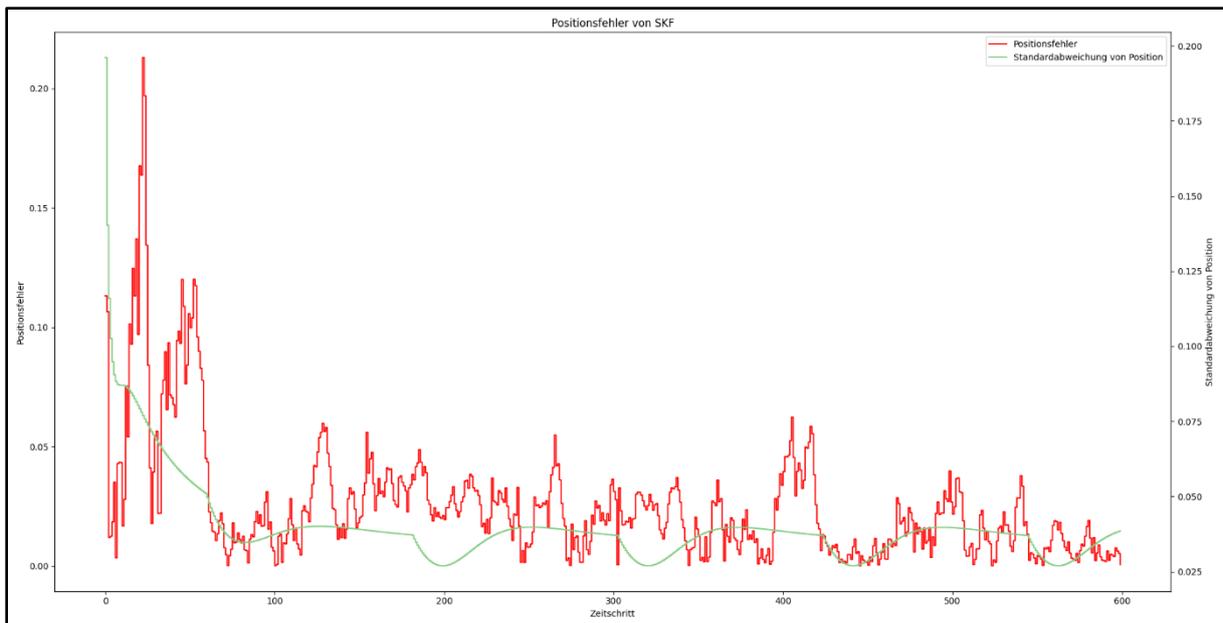


Abbildung 17: Positionenfehler SKF (Szenario 1D)

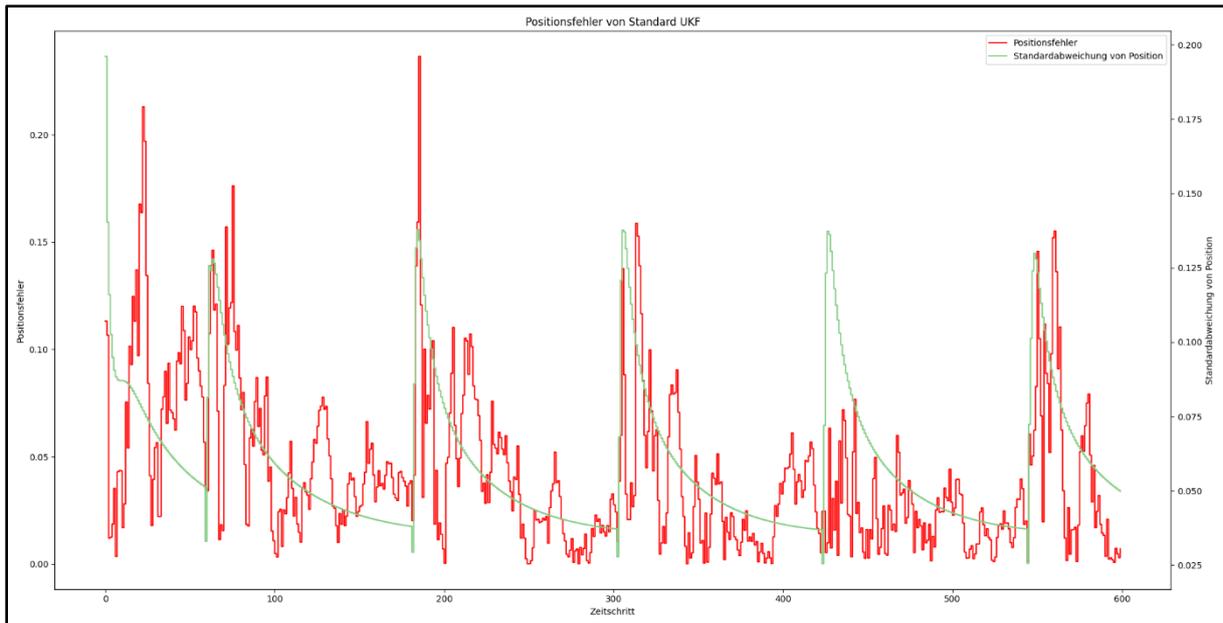


Abbildung 18: Positionenfehler UKF (Szenario 1D)

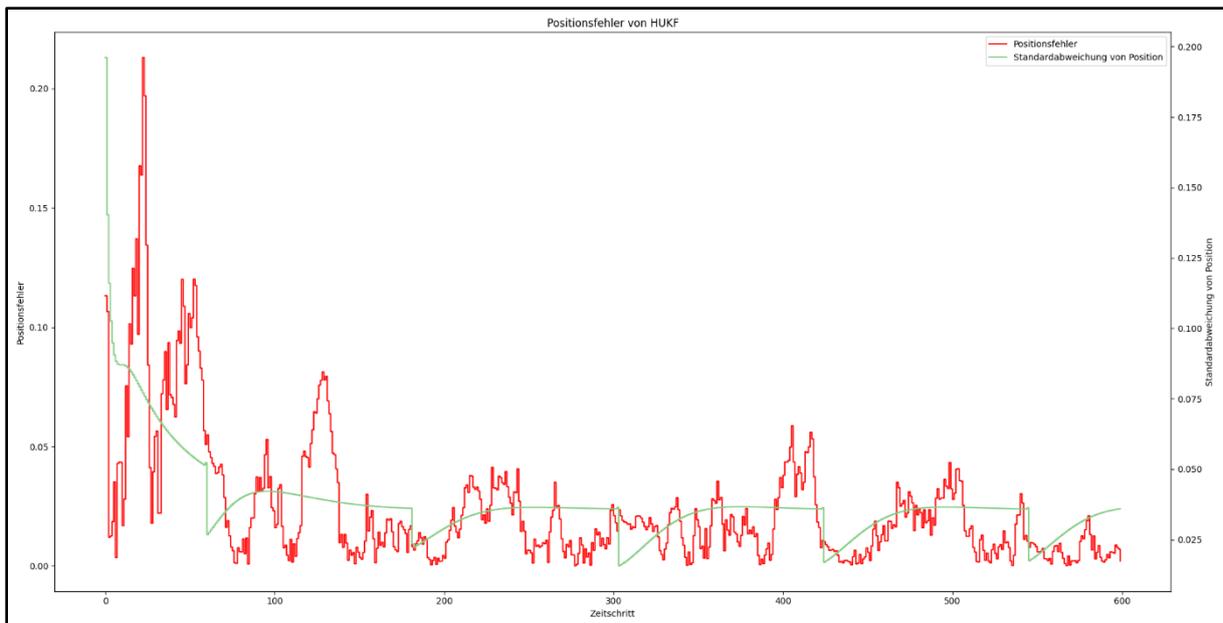


Abbildung 19: Positionenfehler HUKF-SPG (Szenario 1D)

### 6.1.2.2 Geschwindigkeit

Für die qualitative Auswertung der Geschwindigkeitsschätzungen der verschiedenen Filtervarianten wird in Abbildung 20 bis Abbildung 23 jeweils der Schätzwert der Geschwindigkeit mit einem  $\pm 1 \sigma$ -Intervall und die Geschwindigkeit des echten Balls grafisch dargestellt. Zusätzlich wird auch der Wert der Standardabweichung dargestellt. Darauf folgen Abbildung 24 bis Abbildung 27, in denen der absolute Geschwindigkeitsfehler (Betrag der Differenz des echten Wertes und der Schätzung) sowie die Standardabweichung der Geschwindigkeit dargestellt sind.

Zwischen den Zeitverläufen der Geschwindigkeiten des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten, des SKF und des HUKF-SPG sind keine großen Abweichungen erkennbar. Beim UKF fällt auf, dass die Schätzung der Geschwindigkeit nach dem Sprung deutlich von der korrekten Geschwindigkeit abweicht. Auch die geschätzte Standardabweichung ist innerhalb dieses Zeitraums deutlich erhöht. Beim HUKF-SPG hingegen bleibt die geschätzte Standardabweichung auch während des Aufpralls auf einem gleichbleibenden Niveau. Im Gegensatz hierzu steigt die geschätzte Standardabweichung des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten nur für den kurzen Moment des Aufpralls stark an. Hier zeigt sich der Vorteil des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten gegenüber den anderen beiden Varianten des UKF, da dieses Verhalten durchaus plausibel zu sein scheint. Anschaulich lässt sich dies wie folgt verdeutlichen. Durch die Unsicherheit der Schätzung kommt es in der Nähe des Aufprallzeitpunkts dazu, dass Teile der Verteilung bereits die Bedingung der Guard Map erfüllen und andere nicht. Die daraus resultierende Unsicherheit im Sprungzeitpunkt muss daher zu einem starken Anstieg der Varianz der Geschwindigkeit führen, da sich ein Teil der Verteilung noch nach unten bewegt und der andere Teil bereits nach oben. Mit zunehmendem Abstand zum Aufprallzeitpunkt wird die Varianz der Geschwindigkeit wieder klein, da nun die komplette Verteilung die Dynamikgrenze passiert hat und nur noch kleinere Abweichungen auftreten. Dadurch, dass die Sigmapunten beim UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten nicht verworfen werden, kann das erläuterte Verhalten der Varianz durch diese abgebildet werden, während dies den anderen Filtern nicht möglich ist. Dies zeigt sich auch bei den Geschwindigkeitsfehlern. Beim UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten ist eine hohe Varianz der Geschwindigkeit immer dann zu erkennen, wenn ein Aufprall stattfindet und der Geschwindigkeitsfehler groß ist. Beim HUKF-SPG findet ein solches Verhalten der Varianz nicht statt und beim SKF und UKF ist der Zeitpunkt dieser Anpassung nicht gleichermaßen präzise zum Zeitpunkt des Aufpralls, sondern auch noch darüber hinaus. Die hohen Geschwindigkeitsfehler zu diesen Zeitpunkten sind darauf zurückzuführen, dass der echte Ball nicht exakt im selben Zeitschritt springt wie die Schätzungen der Filter, wodurch es kurzzeitig zu sehr großen Fehlern kommt.

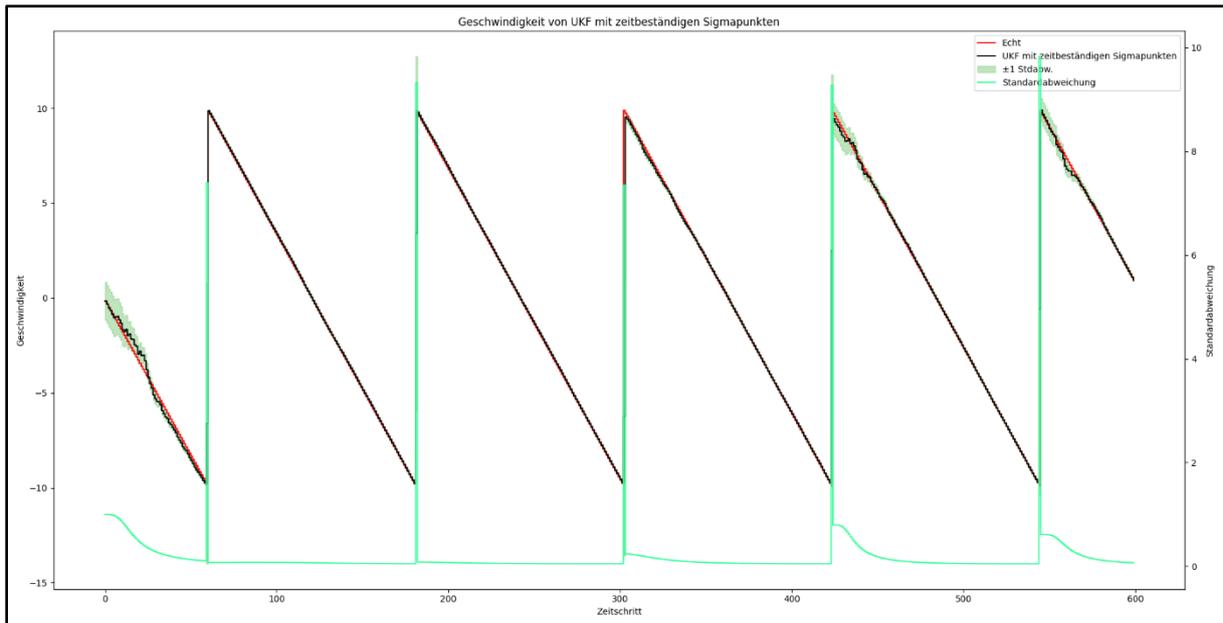


Abbildung 20: Geschwindigkeit UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D)

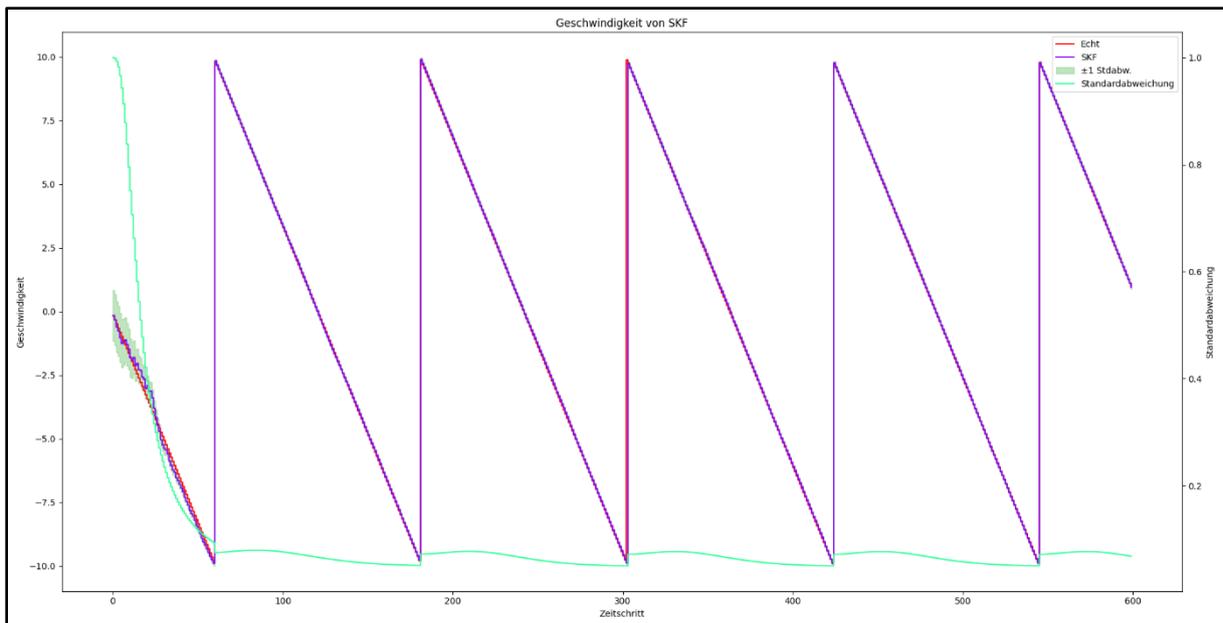


Abbildung 21: Geschwindigkeit SKF (Szenario 1D)

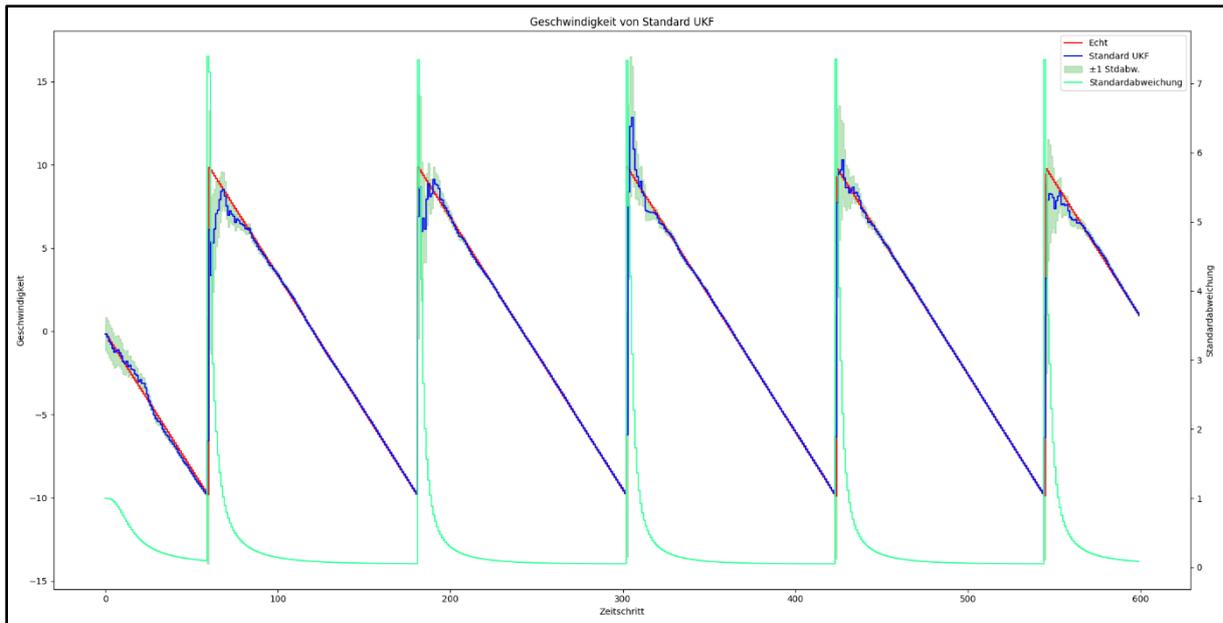


Abbildung 22: Geschwindigkeit UKF (Szenario 1D)

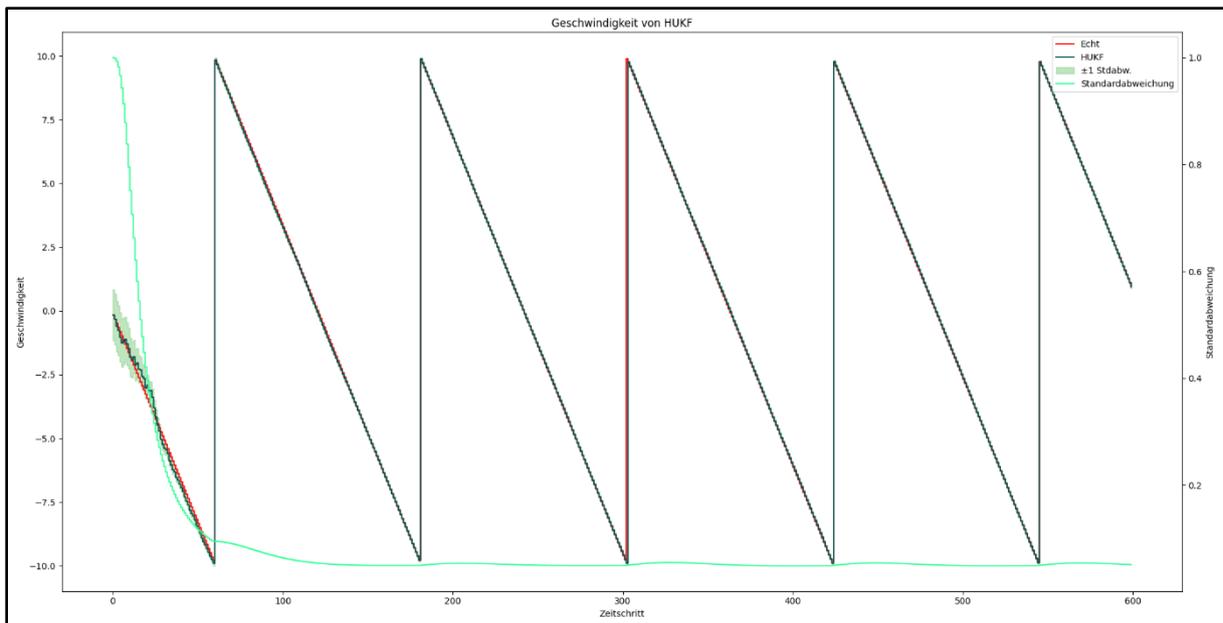


Abbildung 23: Geschwindigkeit HUKF-SPG (Szenario 1D)

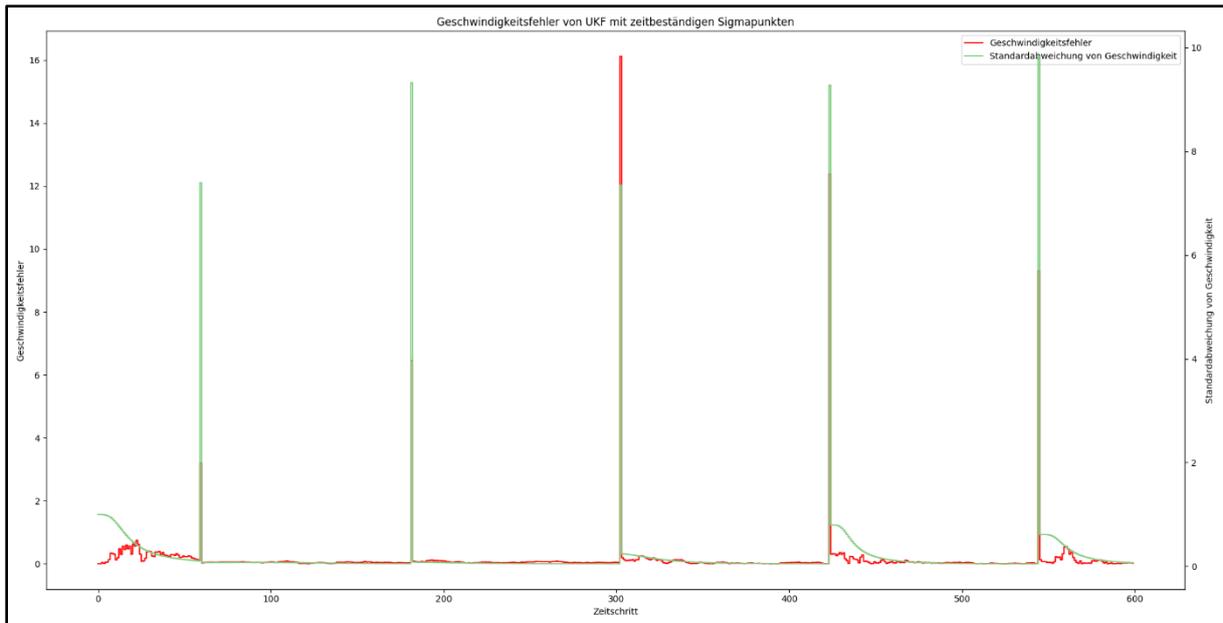


Abbildung 24: Geschwindigkeitsfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D)

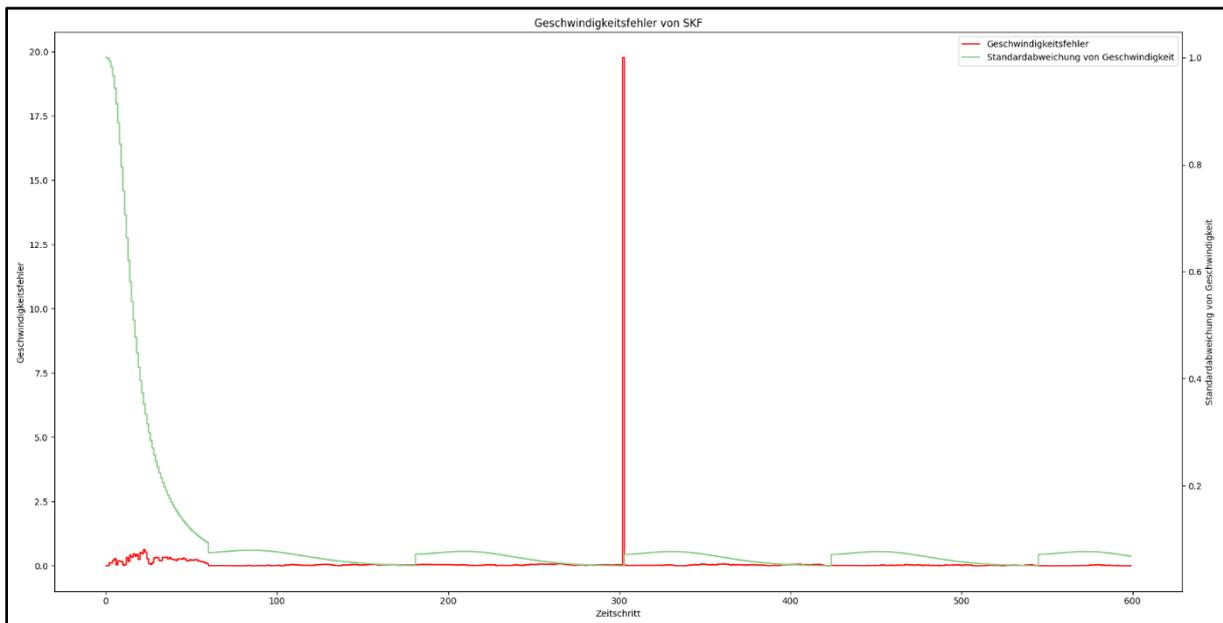


Abbildung 25: Geschwindigkeitsfehler SKF (Szenario 1D)

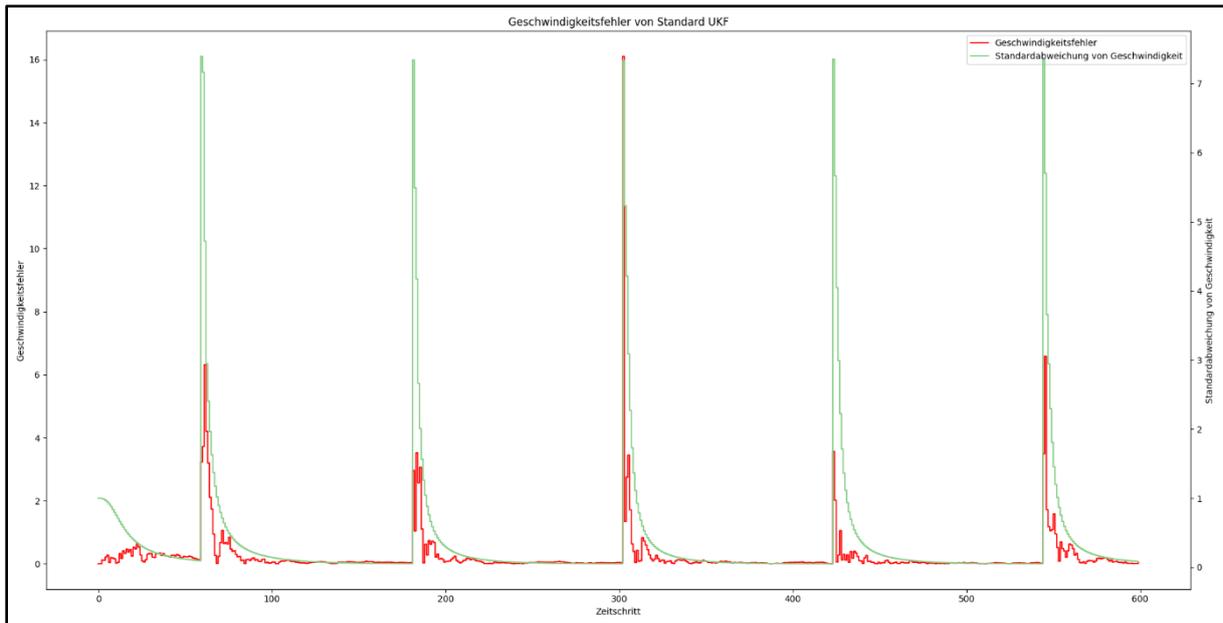


Abbildung 26: Geschwindigkeitsfehler UKF (Szenario 1D)

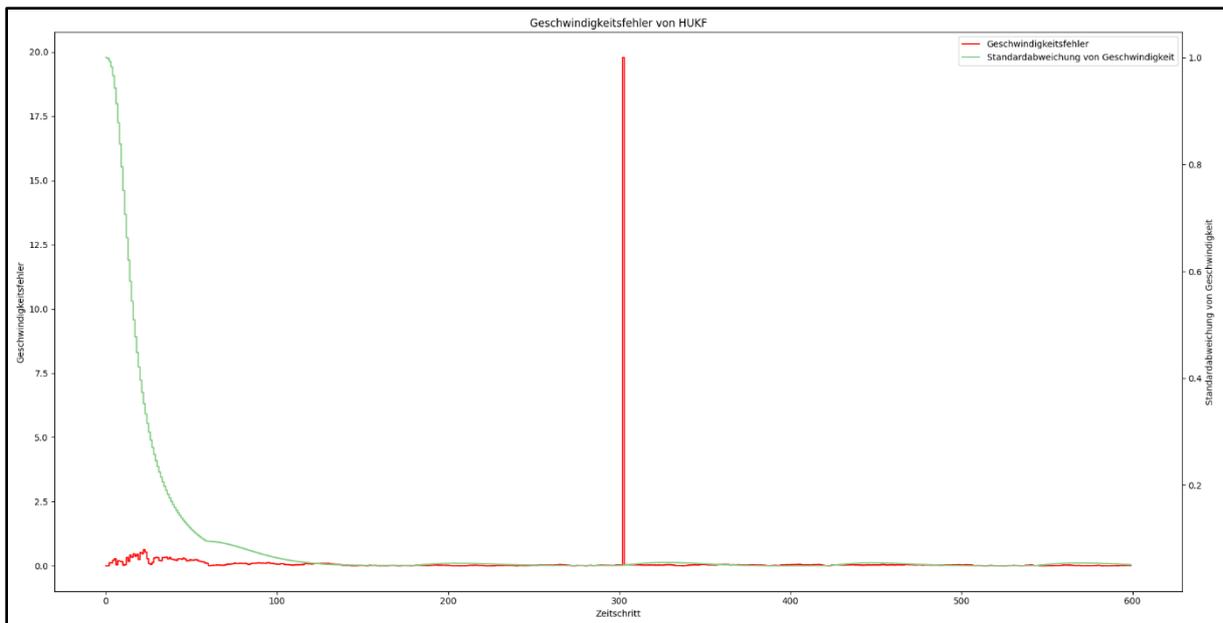


Abbildung 27: Geschwindigkeitsfehler HUKF-SPG (Szenario 1D)

### 6.1.2.3 Konsistenz

In Abbildung 28 bis Abbildung 31 sind die zeitlichen Verläufe der Konsistenz sowie der Mahalanobis-Distanzen für jeden Zeitschritt dargestellt, wobei die Ausreißer der Mahalanobis-Distanzen in Bezug auf die Berechnung der Konsistenz wie in Abschnitt 6 beschrieben korrigiert wurden. Beim Betrachten der Abbildungen fällt auf, dass es bei allen Filtern zu großen Mahalanobis-Distanzen in der Nähe der Aufprallzeitpunkte kommen kann (zu erkennen sind diese an den Spitzen in den Verläufen der Mahalanobis-Distanz). Die genauere Untersuchung dieser Zeitpunkte zeigt, dass die Ausreißer immer dann auftreten, wenn der tatsächliche Aufprall nicht im selben Zeitschritt liegt wie der geschätzte. Dies ist in Abbildung 32 am Beispiel der Geschwindigkeit des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten dargestellt. Anschaulich bedeutet dies am Beispiel des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten, dass der echte Ball springt, bevor der erste Sigmapunkt gesprungen ist bzw. erst nachdem alle Sigmapunkte gesprungen sind. Dies hat zur Folge, dass der große Geschwindigkeitsfehler nicht im Bereich der großen Geschwindigkeitsvarianz (durch Sigmapunkte, die zu einem Teil schon gesprungen sind und zu einem anderen Teil noch nicht) auftritt, und somit zu einer großen Mahalanobis-Distanz führt. Für die übrigen Filter gilt dies analog.

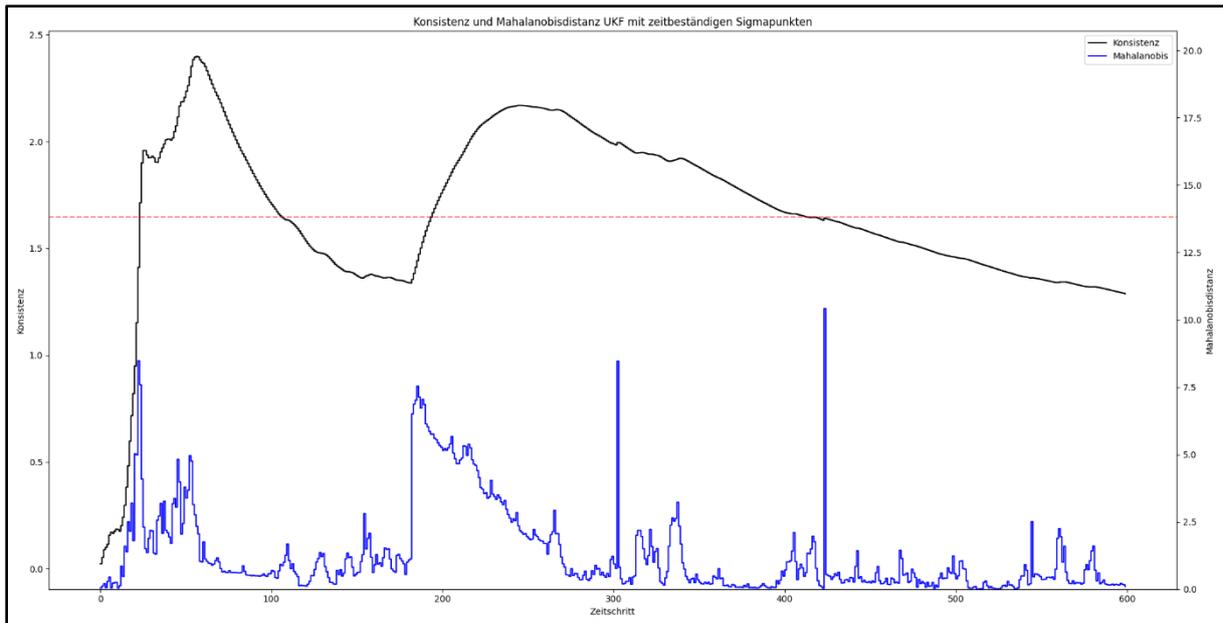


Abbildung 28: Konsistenz UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D)

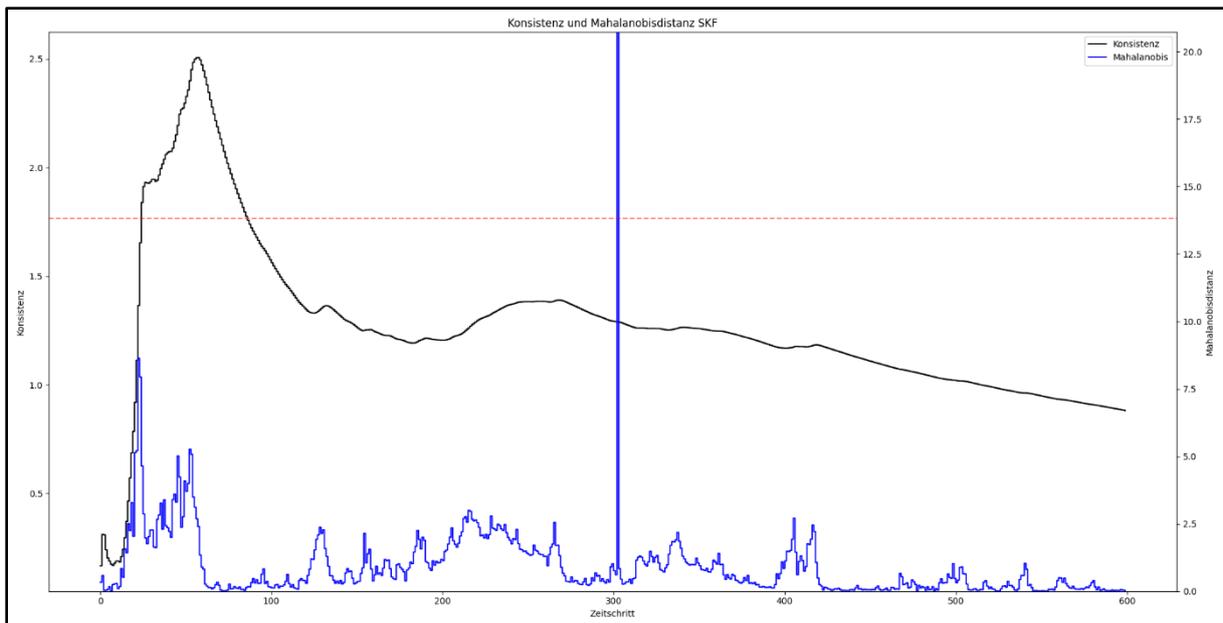


Abbildung 29: Konsistenz SKF (Szenario 1D)

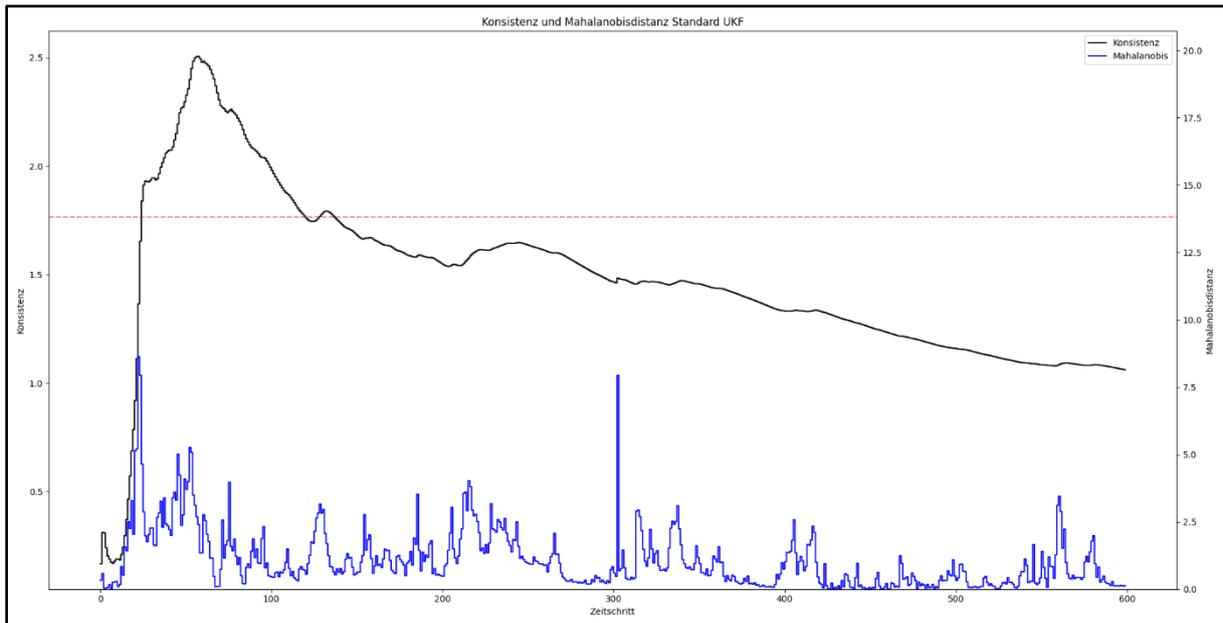


Abbildung 30: Konsistenz UKF (Szenario 1D)

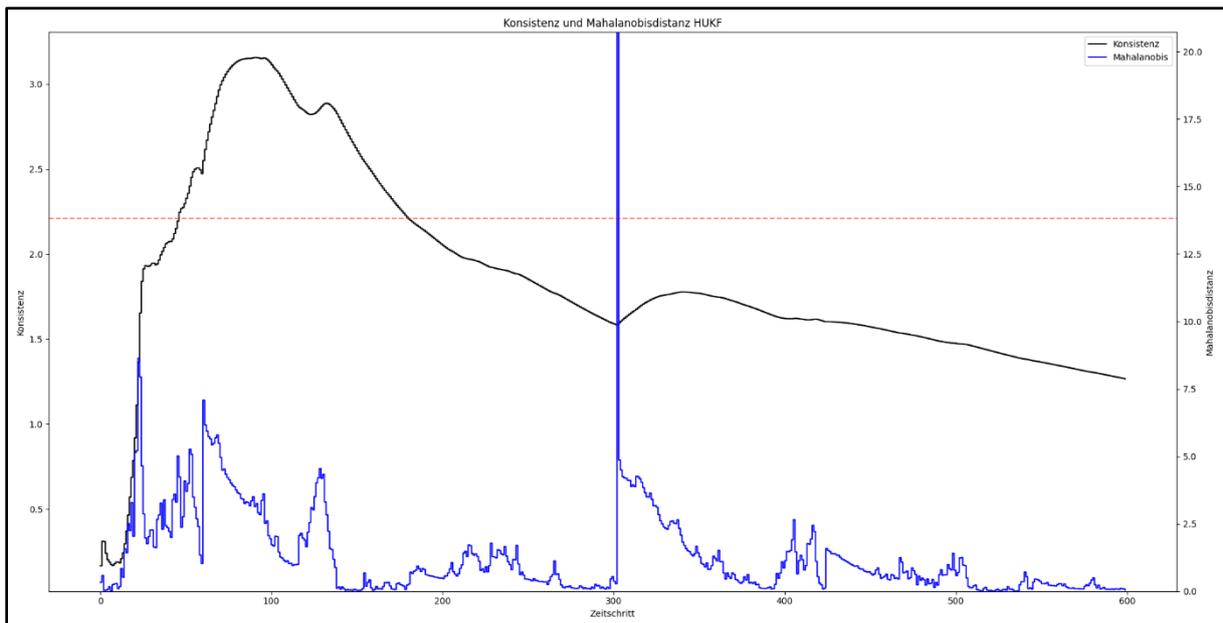


Abbildung 31: Konsistenz HUKF-SPG (Szenario 1D)

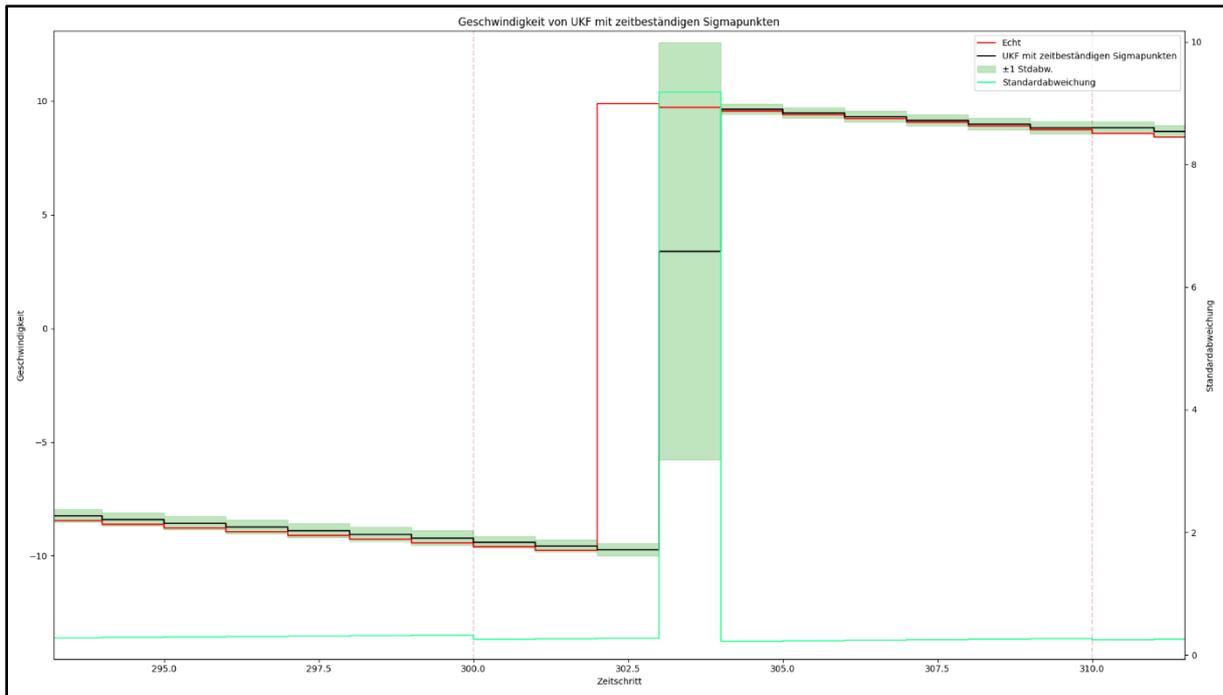


Abbildung 32: Geschwindigkeit UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten zum Sprungzeitpunkt (Szenario 1D)

## 6.2 Szenario 3D

Die Auswertung für den 3D-Fall erfolgt analog zum 1D-Fall beginnend mit einer quantitativen Auswertung und einer anschließenden qualitativen Auswertung. Da diese Arbeit den Schwerpunkt auf die hybride Dynamik setzt, wird bei der qualitativen Auswertung vorrangig die z-Komponente der Zustandsschätzung betrachtet, da sich hier die hybriden Eigenschaften bzw. Unstetigkeiten des Systems abspielen. Außerdem dient diese Vernachlässigung der x- und y-Komponenten der Übersichtlichkeit, sodass ein direkter Vergleich zum 1D-Fall möglich ist. Aufgrund der Ähnlichkeit zum 1D-Fall fallen in diesem Abschnitt die Erläuterungen gleicher Effekte kürzer aus, sodass vermehrt auf Abweichungen und Ergänzungen eingegangen werden kann.

Für die Auswertung wird zunächst der Referenz-Ball mit einem Radius von  $r = 0,11m$  auf dem Boden an der Position  $(-2,25, r)^T$  platziert und mit einer Geschwindigkeit von  $(0 \quad -5 \quad 5)^T \frac{m}{s}$  initialisiert, sodass dieser sich nach oben und auf die Kameras zubewegt, die sich an den Positionen  $(-10,0,2)^T$  und  $(10,0,2)^T$  befinden. Die Winkelgeschwindigkeit wird mit  $(0 \quad 0 \quad 3000)^T \frac{^\circ}{s}$  initialisiert (etwa  $8,3 \frac{U}{s}$  um die z-Achse), sodass sich auch der Magnus-Effekt auf den Ball auswirkt. Die initialen Schätzungen der Filter werden ebenfalls auf diesen Werten initialisiert. Die initiale Varianz der Position beträgt hierbei  $(1m)^2$ , die Varianz der Geschwindigkeit  $(1 \frac{m}{s})^2$  und die Varianz der Winkelgeschwindigkeit  $(1 \frac{U}{s})^2$ . Die Simulation erfolgt mit 60 Bildern bzw. Schritten pro Sekunde. Die Dauer eines Zeitschritts beträgt somit  $\frac{1}{60}s$ . Der Wert, ab dem Mahalanobis-Distanzen als Ausreißer betrachtet werden, ist in Abbildungen mit einer horizontalen roten Linie gekennzeichnet.

### 6.2.1 Quantitative Auswertung

Um die verschiedenen Filter quantitativ auswerten zu können, wurde die Simulation 50-mal wiederholt. Aus den aufgezeichneten Daten der Mahalanobis-Distanz sowie den Positions- und Geschwindigkeitsfehlern wurden der Mittelwert und die Standardabweichung ermittelt. Bei den Mahalanobis-Distanzen wurden die Ausreißer wie in Abschnitt 6 beschrieben korrigiert. Außerdem wurde die Simulation für die Auswertung mit verschiedenen Parametern ausgeführt. Dafür wurden verschiedene Werte für das Rauschen im Dynamik- und Messschritt sowie verschiedene Intervall für den Messzeitpunkt verwendet. Es wurden die folgenden Parametersätze getestet:

- Parametersatz 1:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,05 \frac{m}{s\sqrt{s}}, \sigma_\omega = 5 \frac{^\circ}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 5$
  - Messungen in jedem Schritt
- Parametersatz 2:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,1 \frac{m}{s\sqrt{s}}, \sigma_\omega = 10 \frac{^\circ}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 5px$
  - Messungen in jedem Schritt
- Parametersatz 3:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,05 \frac{m}{s\sqrt{s}}, \sigma_\omega = 5 \frac{^\circ}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 10px$

- Messungen in jedem Schritt
- Parametersatz 4:
  - Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,05 \frac{m}{s\sqrt{s}}, \sigma_\omega = 5 \frac{\circ}{s\sqrt{s}}$
  - Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 5px$
  - Messungen in jedem fünften Schritt

Die Initialisierung des Zustands und der Kovarianzmatrix sind für alle Parametersätze identisch und wie oben beschrieben

Die Ergebnisse dieser Tests sind in Tabelle 2 aufgeführt. Im Gegensatz zum 1D Fall (vgl. Abschnitt 6.1.1) ist bei den absoluten Positionsfehlern kein nennenswerter Unterschied zwischen den verschiedenen Kalman Filter Varianten festzustellen, jedoch liefert der SKF in allen betrachteten Fällen die besten Ergebnisse.

Die im Vergleich zum 1D Fall guten Werte des UKF könnten auf verschiedene Ursachen zurückzuführen sein. Zum einen weist der Zustand deutlich mehr Dimensionen auf, von denen aber verhältnismäßig wenige von den Unstetigkeiten betroffen sind. Anschlic ist dies so zu verstehen, dass in der x- und y- Komponente der Position keine Unstetigkeiten auftreten und die Schätzungen durch einen UKF kein Problem sind. Und so fallen ggf. größere Fehler in der z-Komponente beim Gesamtfehler der Position weniger ins Gewicht. Und zum anderen werden pro Messschritt zwei Messungen (und folglich auch Korrekturen) der Position durchgeführt, da zwei Kameras vorhanden sind. Auch hierdurch ist ein kleinerer Positionsfehler zu erwarten.

Auch bei den Geschwindigkeitsfehlern liefert der SKF die besten Werte, wobei der HUKF-SPG nicht stark hiervon abweicht. Der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten weist Geschwindigkeitsfehler auf, die um 15% bis 70% größer sind als die des SKF. Wie auch im 1D Fall weist der UKF die schlechtesten Ergebnisse bei den Geschwindigkeitsfehlern auf, die um 38% bis 71% größer sind als die des SKF.

Bei der Auswertung der Werte für die Konsistenz fällt analog zum 1D Fall auf, dass der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten, der SKF und der UKF die Unsicherheit der Schätzung zu groß schätzen, da die Konsistenz hier kleiner als 9 ist. Der HUKF-SPG hingegen weist Werte nahe der 9 auf, was darauf schließen lässt, dass dessen Unsicherheit angemessen geschätzt wird.

Parametersatz Nr.	Kalman Filter	Konsistenz [1]		Positionsfehler [mm]		Geschwindigkeitsfehler [mm/s]	
		MW	STD	MW	STD	MW	STD
1	UKF m. zeitbest. SP	5,776	1,488	24,861	2,223	151,598	20,825
	SKF	6,890	2,717	<b>22,365</b>	<b>2,848</b>	<b>108,365</b>	<b>23,607</b>
	Standard UKF	4,765	1,333	23,228	2,541	150,734	25,365
	HUKF-SPG	<b>8,571</b>	<b>2,339</b>	23,974	3,143	115,094	24,821
2	UKF m. zeitbest. SP	<b>5,642</b>	<b>1,145</b>	26,550	2,472	191,793	21,459
	SKF	5,343	1,981	<b>23,028</b>	<b>2,587</b>	<b>112,142</b>	<b>19,054</b>
	Standard UKF	4,462	0,907	25,032	2,369	170,069	22,458
	HUKF-SPG	5,498	1,295	23,723	2,627	118,842	22,705
3	UKF m. zeitbest. SP	7,056	1,785	42,657	4,893	202,068	27,354
	SKF	<b>7,667</b>	<b>3,139</b>	<b>39,983</b>	<b>5,577</b>	<b>167,639</b>	<b>31,710</b>
	Standard UKF	6,005	1,955	46,122	5,616	286,984	35,553
	HUKF-SPG	10,480	3,940	43,570	8,281	192,597	45,946
4	UKF m. zeitbest. SP	3,831	0,967	46,228	6,354	198,189	27,165
	SKF	7,468	2,990	<b>42,840</b>	<b>7,003</b>	<b>171,453</b>	<b>36,724</b>
	Standard UKF	5,641	1,580	49,622	6,513	283,617	35,330
	HUKF-SPG	<b>8,833</b>	<b>2,003</b>	44,342	7,265	182,222	45,571

Tabelle 2: Konsistenz, Positions- und Geschwindigkeitsfehler im 3D-Szenario nach 50 Durchgängen

## 6.2.2 Qualitative Auswertung

Für die qualitative Auswertung werden die Parameter wie in Parametersatz 1 aus Abschnitt 6.2.1 gewählt und die Ergebnisse für einen Durchgang grafisch dargestellt. Hierbei werden die Verläufe der Position, der Geschwindigkeit, der Konsistenz sowie des Positions- und des Geschwindigkeitsfehlers betrachtet. Der Wert, ab dem Mahalanobis-Distanzen als Ausreißer betrachtet werden, ist in den Abbildungen mit einer horizontalen roten Linie gekennzeichnet.

### 6.2.2.1 Position

Für die qualitative Auswertung der Positionsschätzungen der verschiedenen Filtervarianten wird in Abbildung 33 bis Abbildung 36 jeweils der Schätzwert der Position mit einem  $\pm 1 \sigma$ -Intervall und die Referenzposition des echten Balls grafisch dargestellt. Zusätzlich wird auch der Wert der Standardabweichung dargestellt. Hierbei werden nur die z-Komponenten der Positionen betrachtet, da nur diese für den Aufprall am Boden relevant sind und so ein Vergleich zum 1D-Fall hergestellt werden. Darauf folgen Abbildung 37 bis Abbildung 40, in denen der absolute Positionsfehler (Betrag der Differenz des echten Wertes und der Schätzung) sowie die Standardabweichung der Position dargestellt sind.

Zwischen den Positionsschätzungen der verschiedenen Kalman Filter Varianten ist anhand der Abbildungen kein nennenswerter Unterschied erkennbar. Auch in den Abbildungen mit den Positionsfehlern sind qualitativ keine nennenswerten Unterschiede festzustellen.

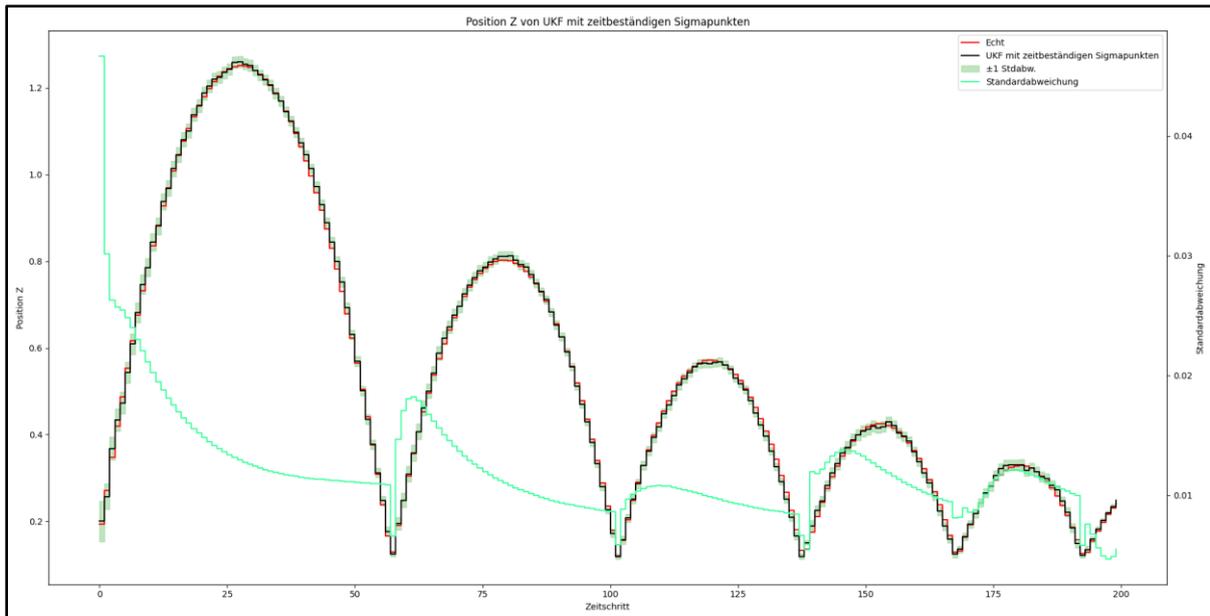


Abbildung 33: Position UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D)

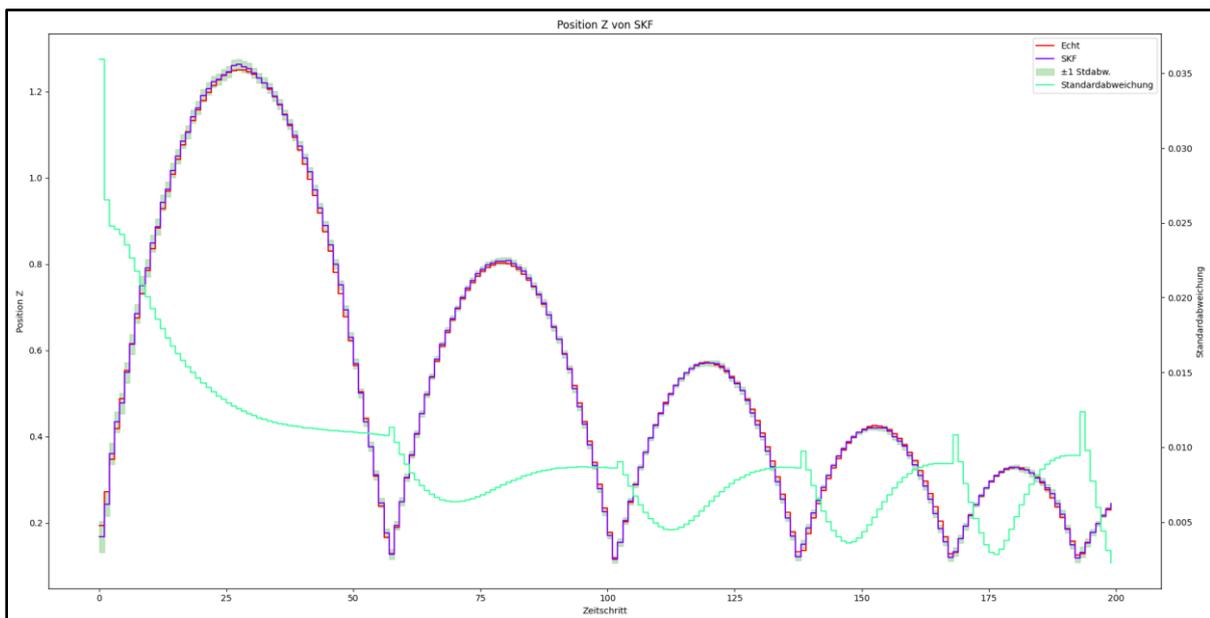


Abbildung 34: Position SKF (Szenario 3D)

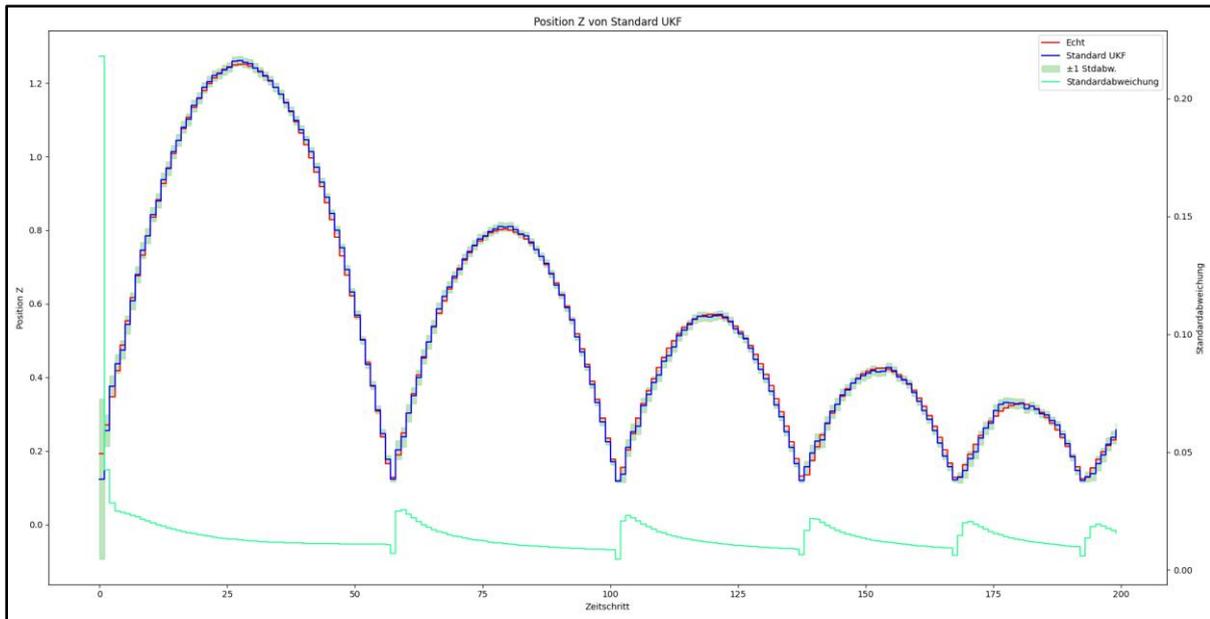


Abbildung 35: Position UKF (Szenario 3D)

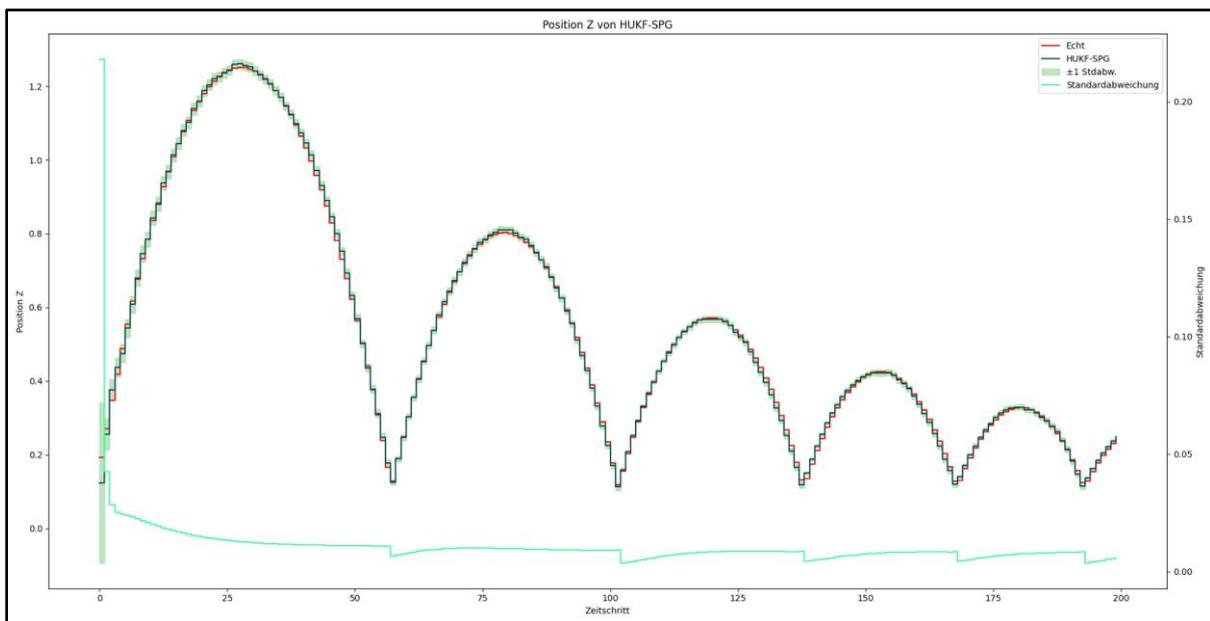


Abbildung 36: Position HUKF-SPG (Szenario 3D)

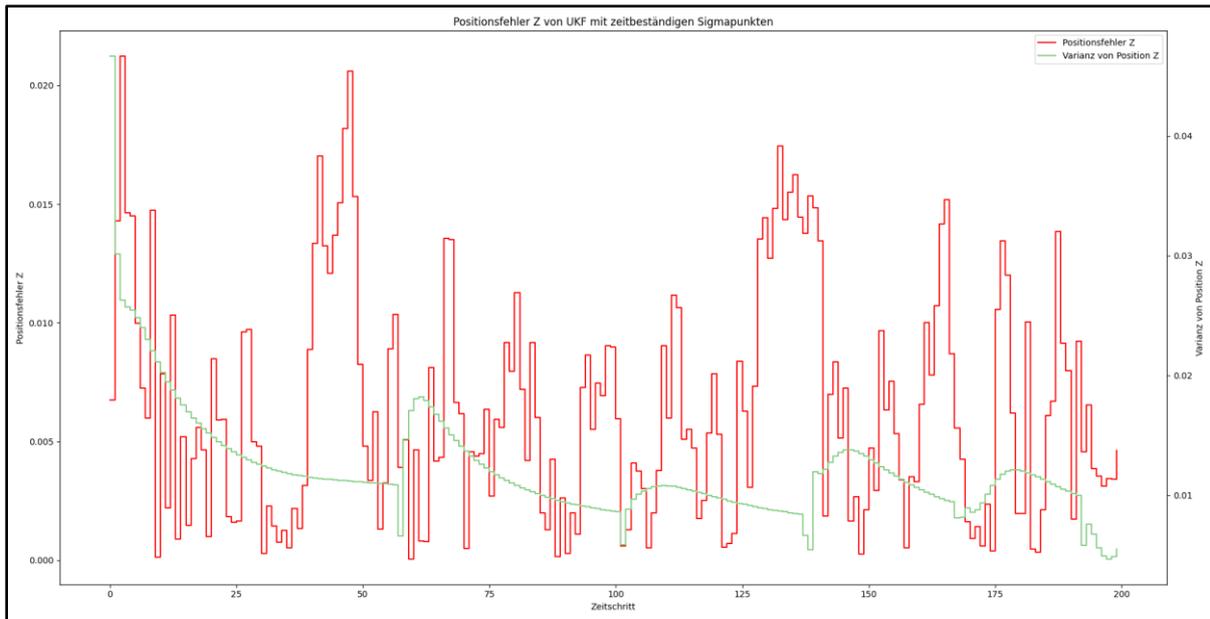


Abbildung 37: Positionenfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D)

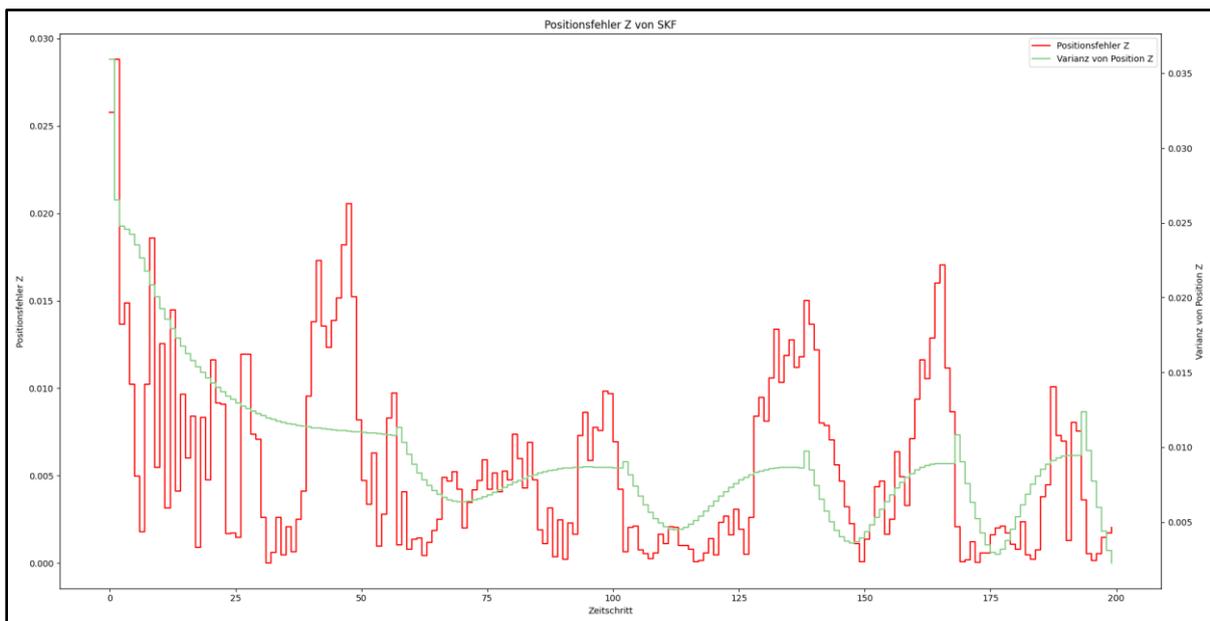


Abbildung 38: Positionenfehler SKF (Szenario 3D)

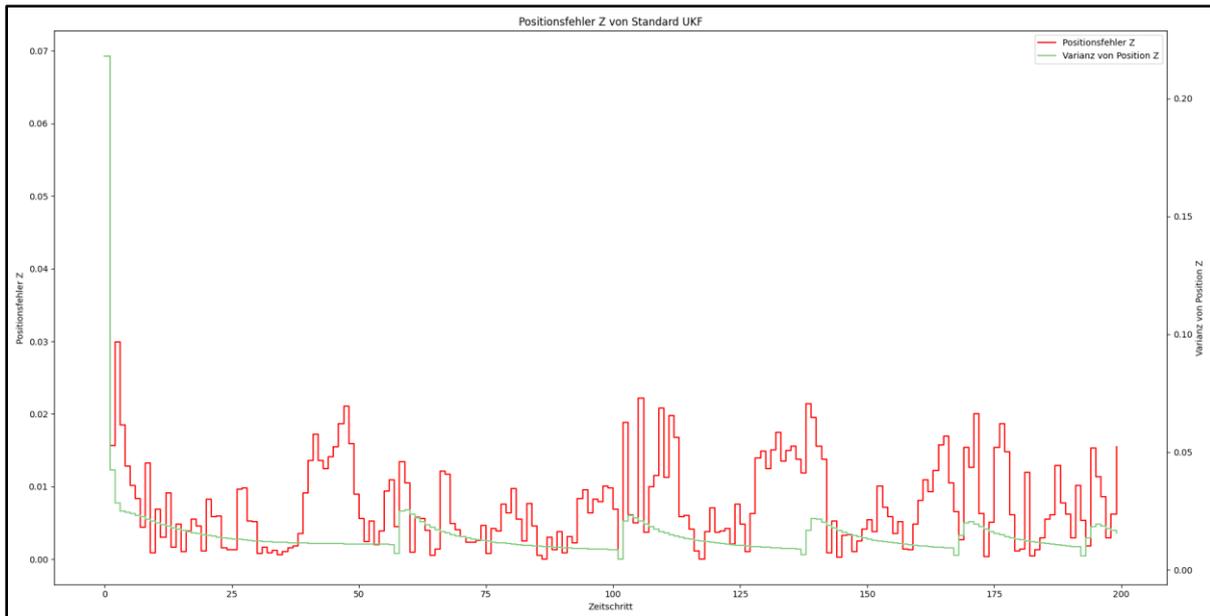


Abbildung 39: Positionenfehler UKF (Szenario 3D)

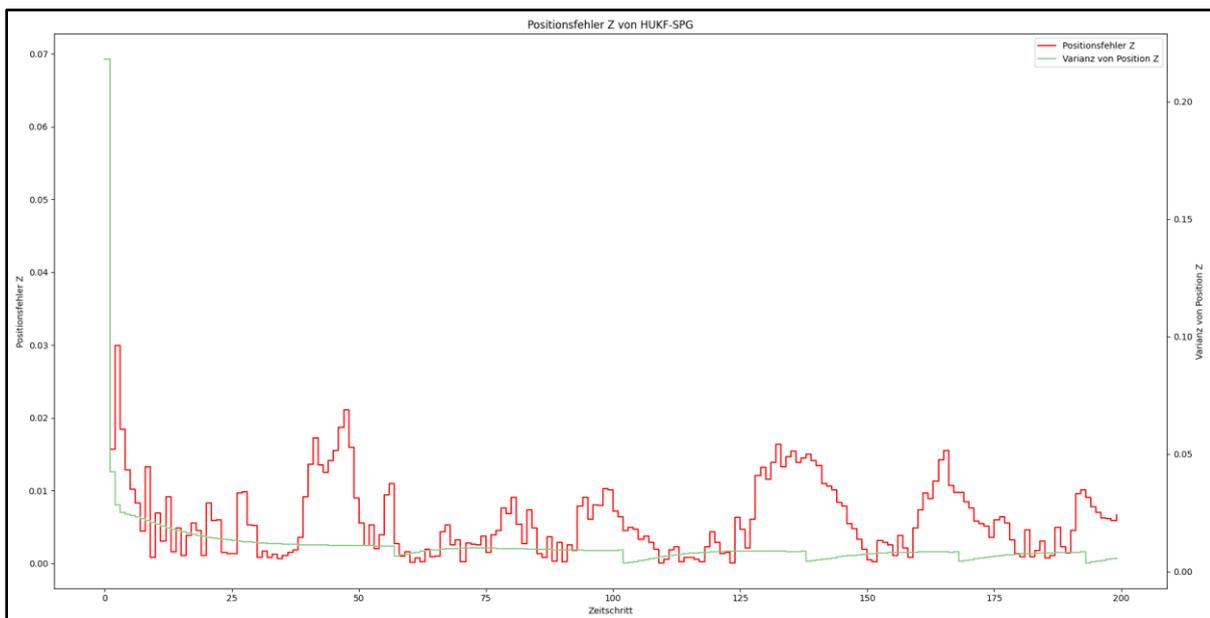


Abbildung 40: Positionenfehler HUKF-SPG (Szenario 3D)

### 6.2.2.2 Geschwindigkeit

Für die qualitative Auswertung der Geschwindigkeitsschätzungen der verschiedenen Filtervarianten wird in Abbildung 41 bis Abbildung 44 jeweils der Schätzwert der Geschwindigkeit mit einem  $\pm 1 \sigma$ -Intervall und die Geschwindigkeit des echten Balls grafisch dargestellt. Zusätzlich wird auch der Wert der Standardabweichung dargestellt. Auch hier wird analog zur Position nur die z-Komponente betrachtet. Darauf folgen Abbildung 45 bis Abbildung 48, in denen der absolute Geschwindigkeitsfehler (Betrag der Differenz des echten Wertes und der Schätzung) sowie die Standardabweichung der Geschwindigkeit dargestellt sind. Für den 3D-Fall können hier grundsätzlich die gleichen qualitativen Beobachtungen wie für den 1D-Fall gemacht werden (vgl. Abschnitt 6.1.2.2).

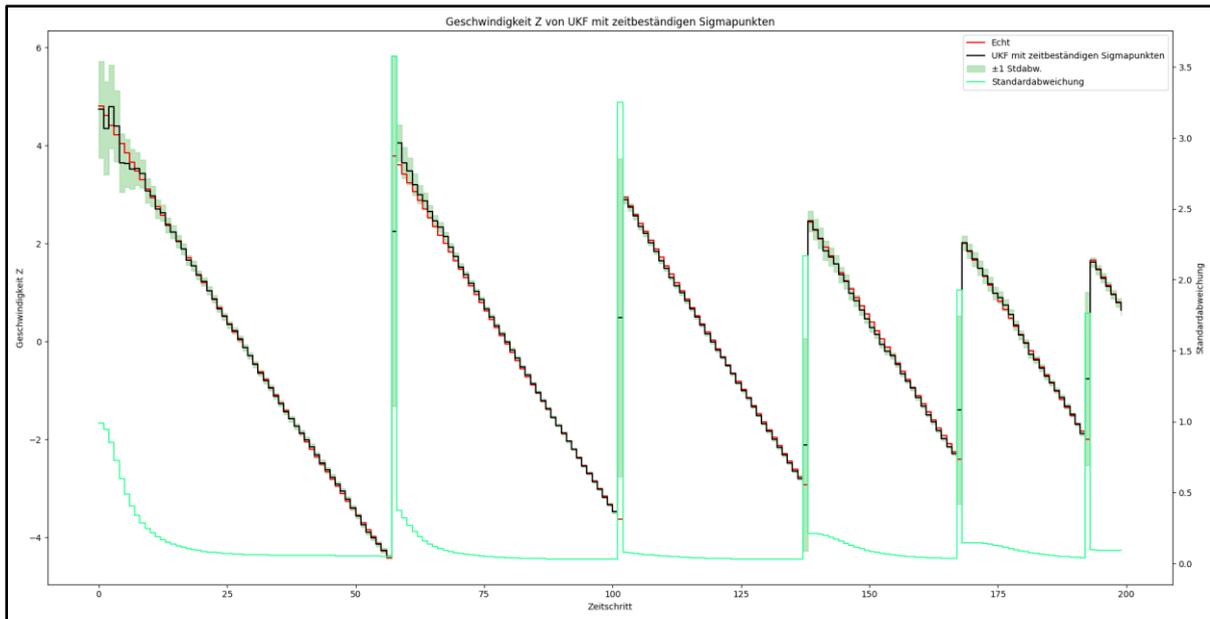


Abbildung 41: Geschwindigkeit UKF mit zeitbeständigen Sigma-punkten (Szenario 3D)

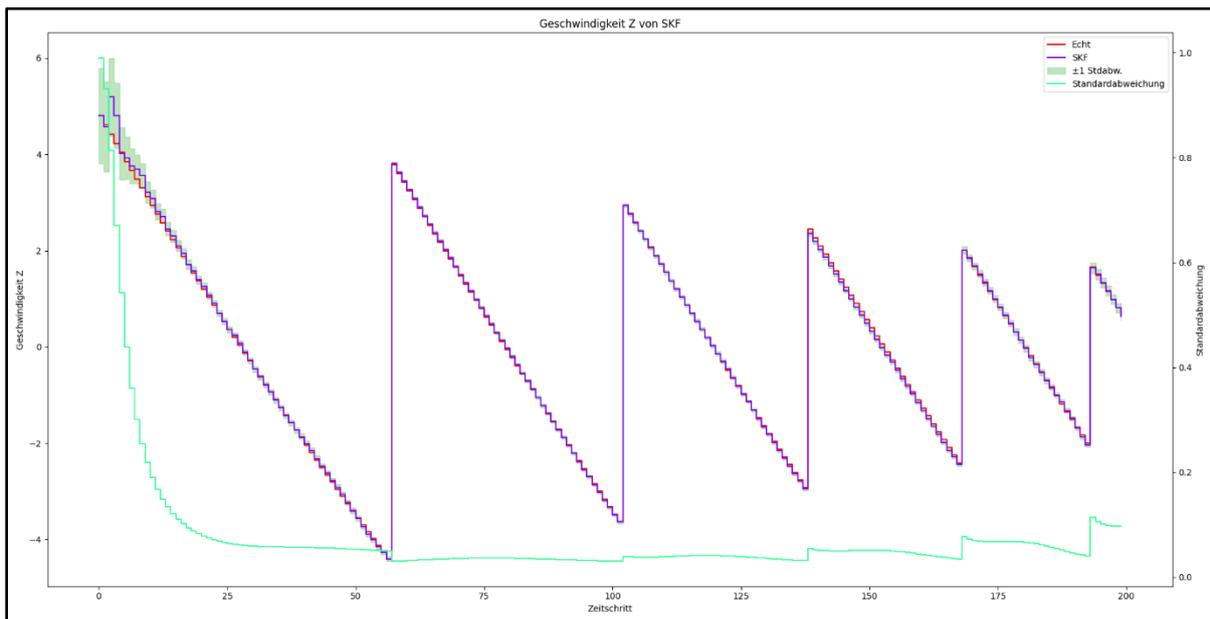


Abbildung 42: Geschwindigkeit SKF (Szenario 3D)

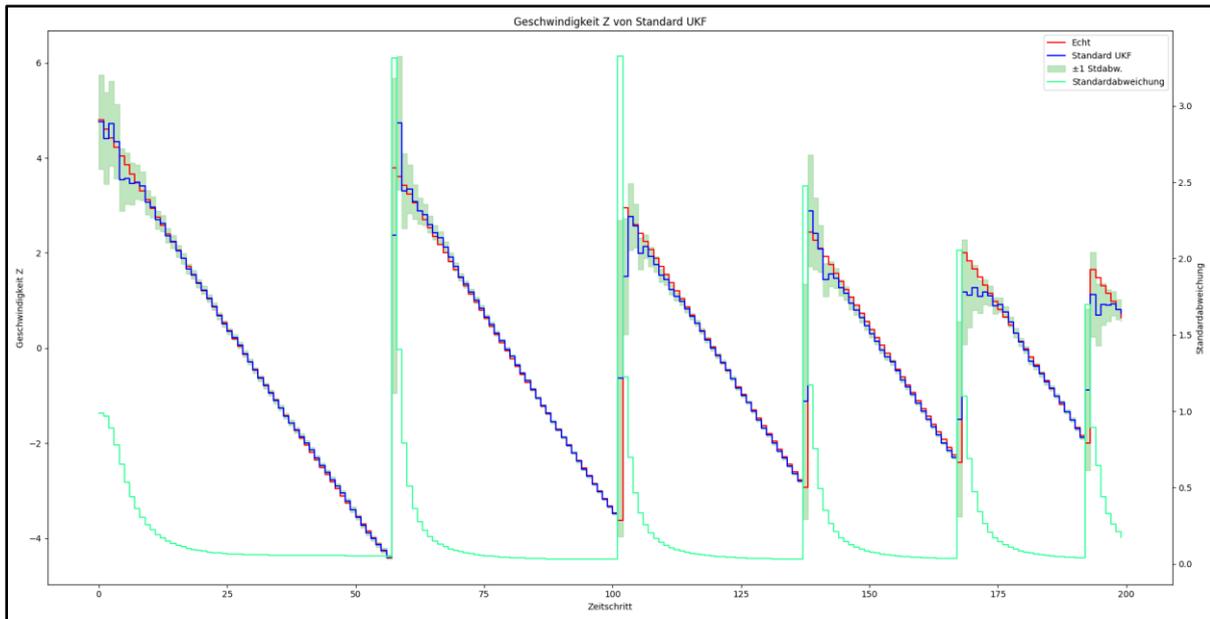


Abbildung 43: Geschwindigkeit UKF (Szenario 3D)

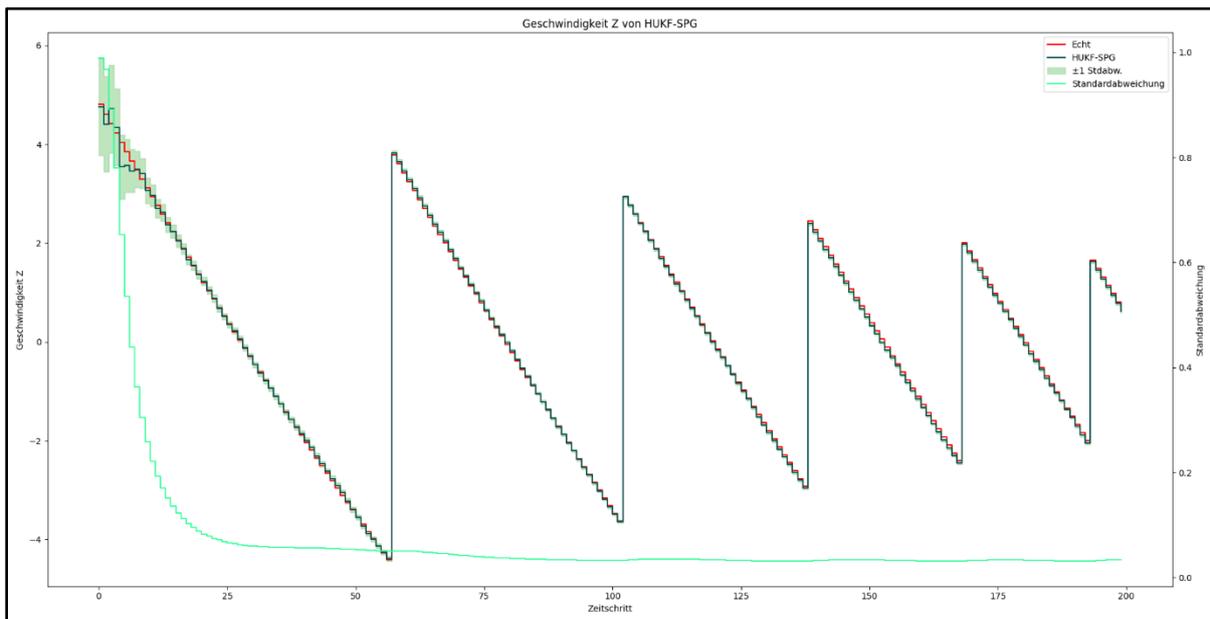


Abbildung 44: Geschwindigkeit HUKF-SPG (Szenario 3D)

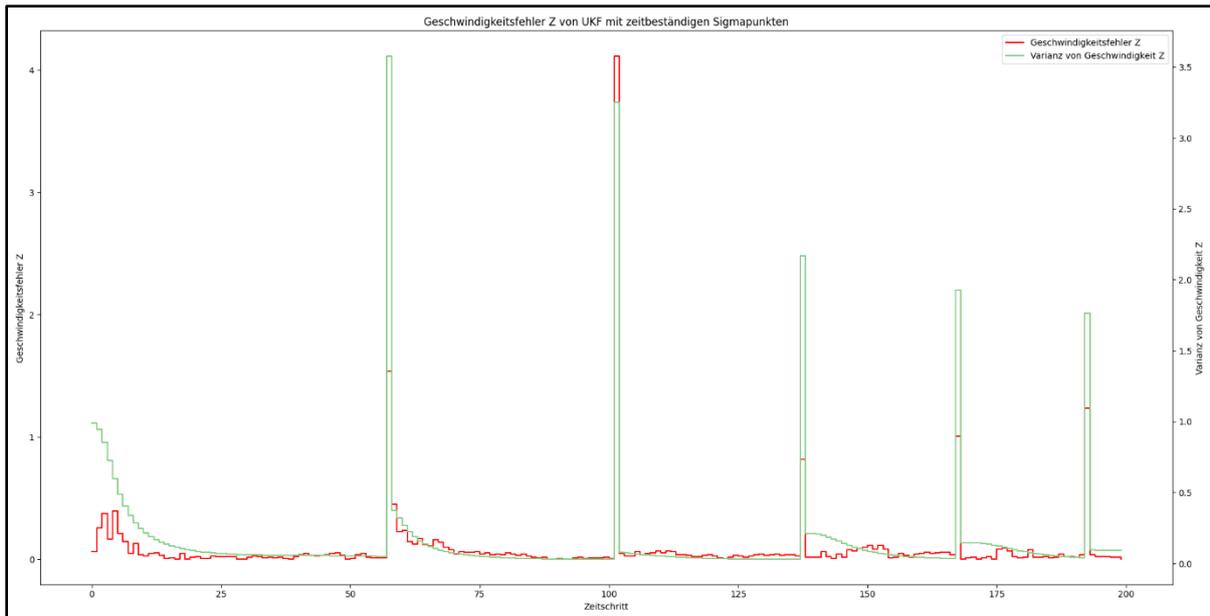


Abbildung 45: Geschwindigkeitsfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D)

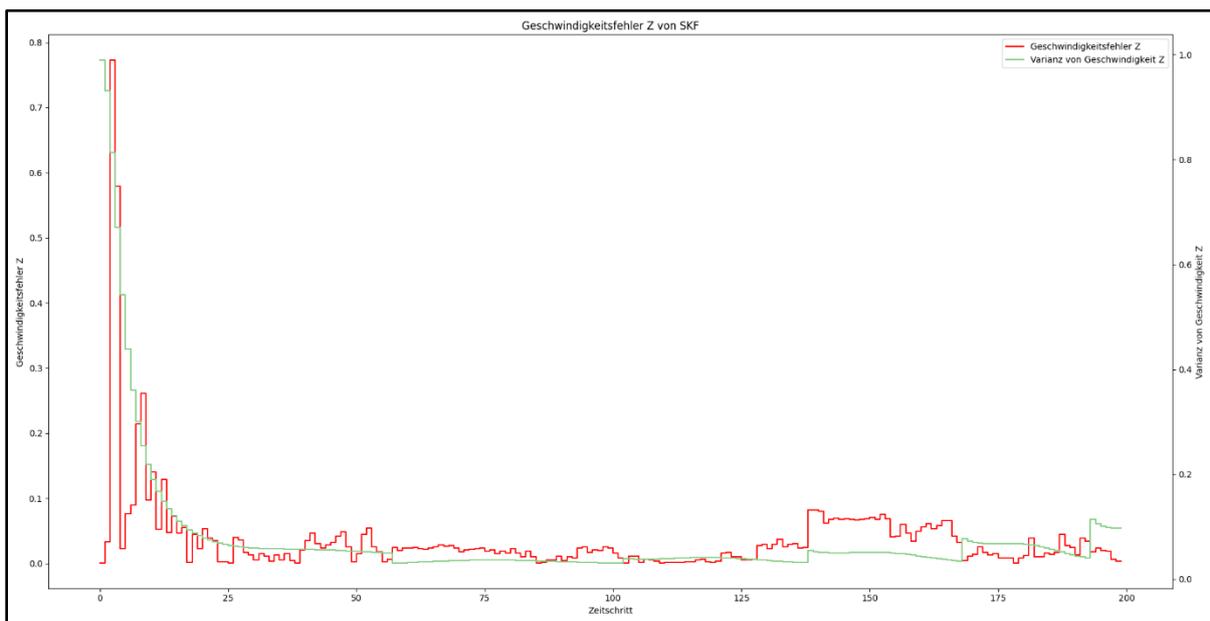


Abbildung 46: Geschwindigkeitsfehler SKF (Szenario 3D)

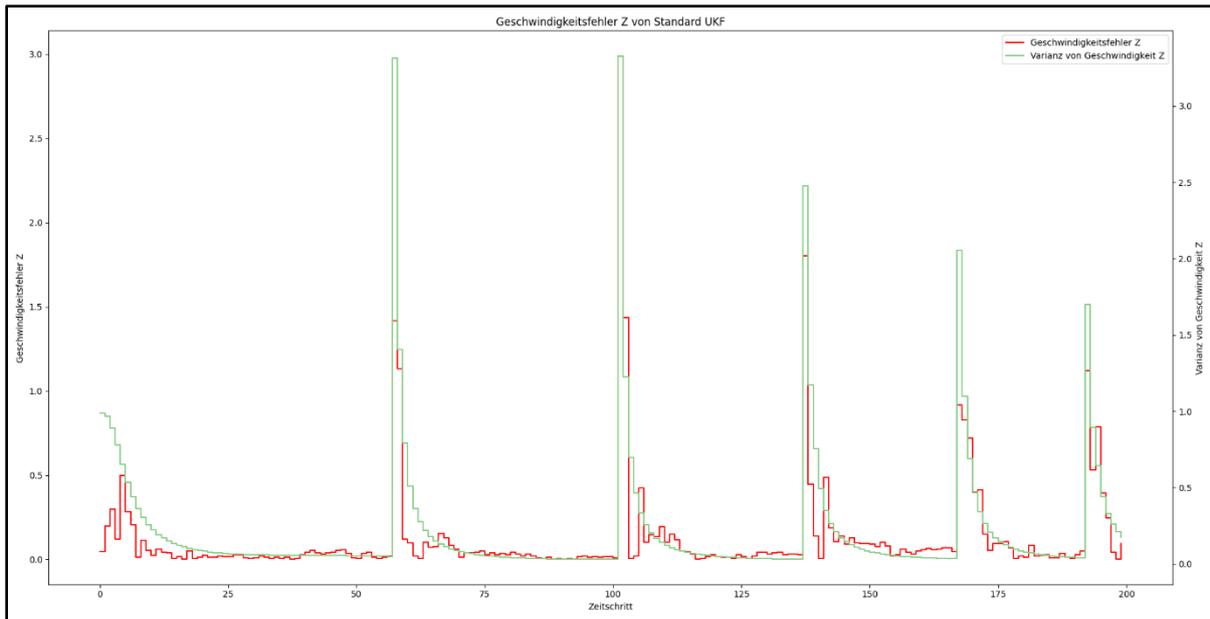


Abbildung 47: Geschwindigkeitsfehler UKF (Szenario 3D)



Abbildung 48: Geschwindigkeitsfehler HUKF-SPG (Szenario 3D)

### 6.2.2.3 Konsistenz

In Abbildung 49 bis Abbildung 52 sind die zeitlichen Verläufe der Konsistenz sowie der Mahalanobis-Distanzen für jeden Zeitschritt dargestellt, wobei die Ausreißer der Mahalanobis-Distanzen in Bezug auf die Berechnung der Konsistenz wie in Abschnitt 6 beschrieben korrigiert wurden. Hierbei kann wie im 1D-Szenario beobachtet werden, dass nahe der Zeitpunkte des Aufpralls hohe Mahalanobis-Distanzen auftreten. Dieses Verhalten ist bereits in Abschnitt 6.1.2.3 erläutert. Darüber hinaus sind keine qualitativen Unregelmäßigkeiten zu erkennen.

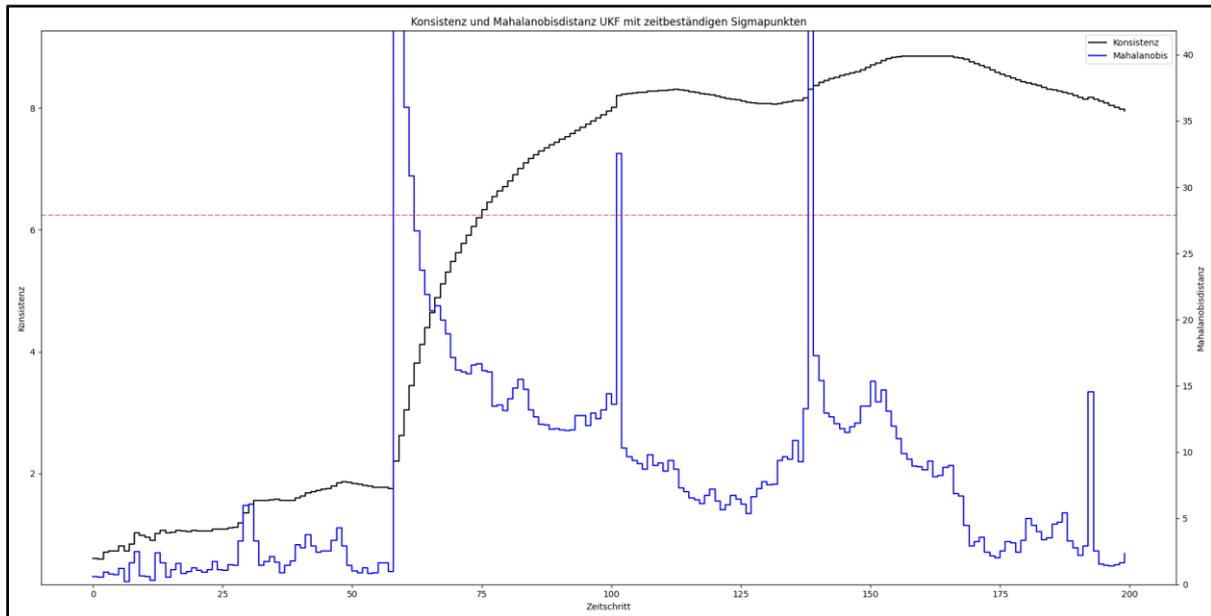


Abbildung 49: Konsistenz UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D)

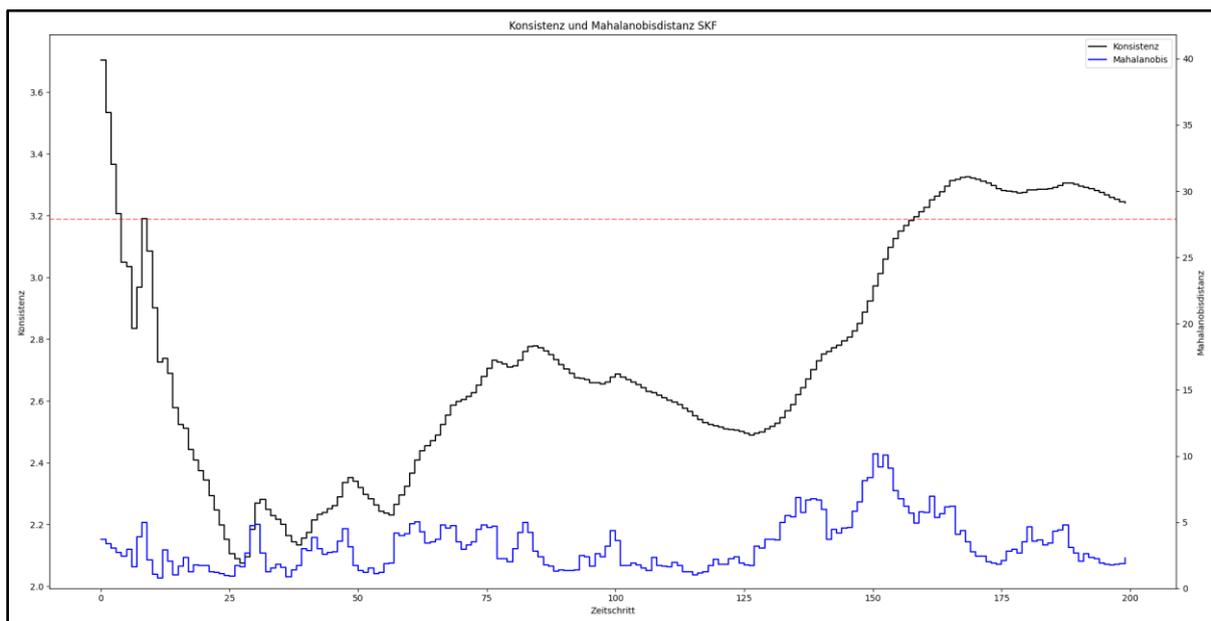


Abbildung 50: Konsistenz SKF (Szenario 3D)

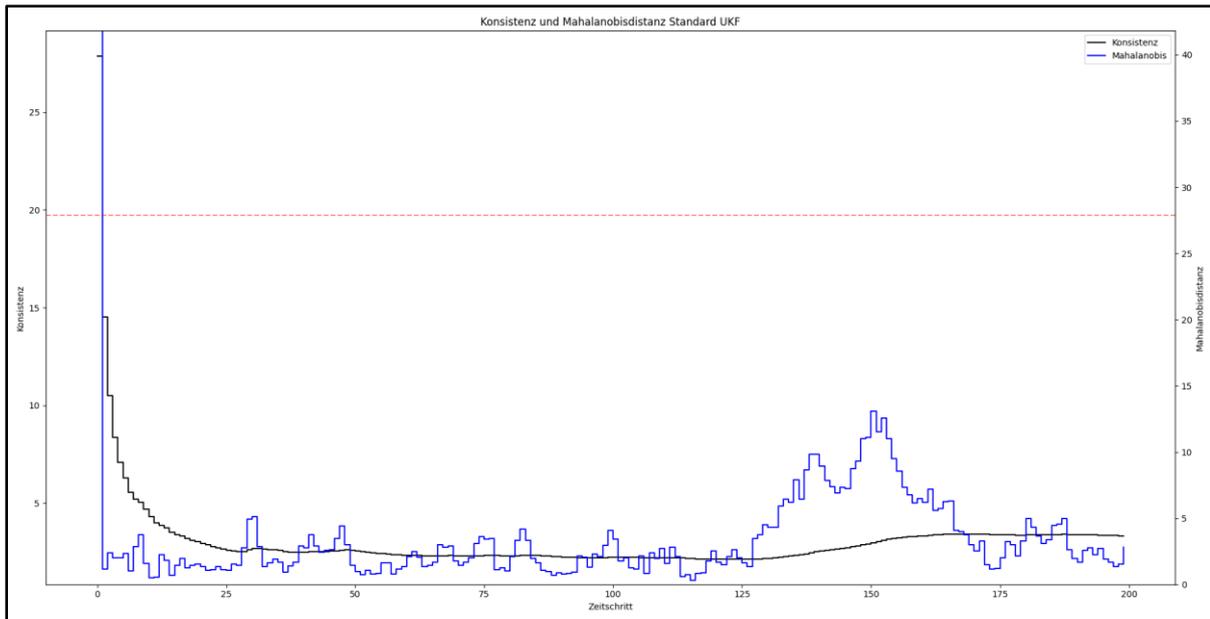


Abbildung 51: Konsistenz UKF (Szenario 3D)

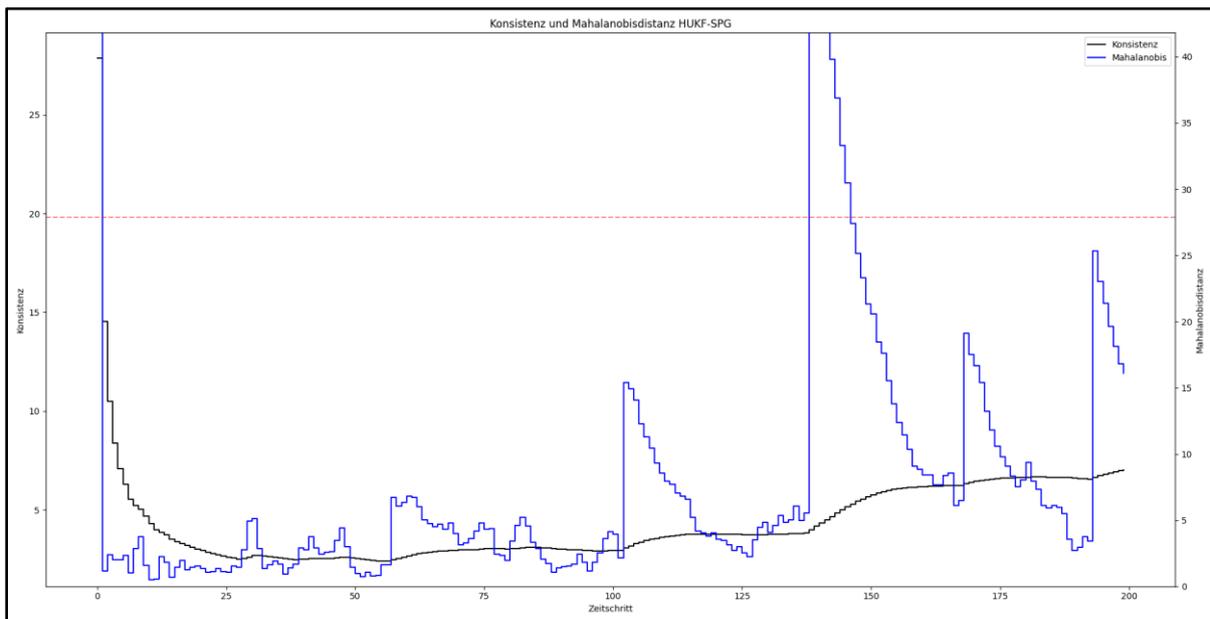


Abbildung 52: Konsistenz HUKF-SPG (Szenario 3D)

### 6.2.2.4 Konsistenzproblem des HUKF-SPG

Bei weiteren Tests, in denen das Dynamik- und Messrauschen verringert wurde, war zu beobachten, dass die Mahalanobis-Distanz des HUKF-SPG sporadisch nach einem Aufprall stark ansteigt, wie es in den Abschnitten 6.1.2.3 und 6.2.2.3 beschrieben wurde, jedoch nach diesem Anstieg nicht wieder zu geringeren Werten zurückfindet. Der absolute, mittlere Positions- und Geschwindigkeitsfehler weisen jedoch keine nennenswerten Unterschiede zu den anderen Filtern auf. Dieses Verhalten ist in Abbildung 53 dargestellt und deutet darauf hin, dass der HUKF-SPG Kovarianzmatrizen schätzt, die im Verhältnis zu den Schätzfehlern deutlich zu niedrig sind. Dies kann insofern problematisch werden, dass der Filter bei größeren Abweichungen der Schätzung vom realen Wert keine ausreichend großen Korrekturen im Messschritt vornehmen kann, wodurch eine zuverlässige Schätzung des realen Wertes unmöglich wird. Der verwendete Parametersatz lautet wie folgt:

- Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,01 \frac{m}{s\sqrt{s}}$ ,  $\sigma_\omega = 1 \frac{^\circ}{s\sqrt{s}}$
- Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 5$
- Messungen in jedem Schritt

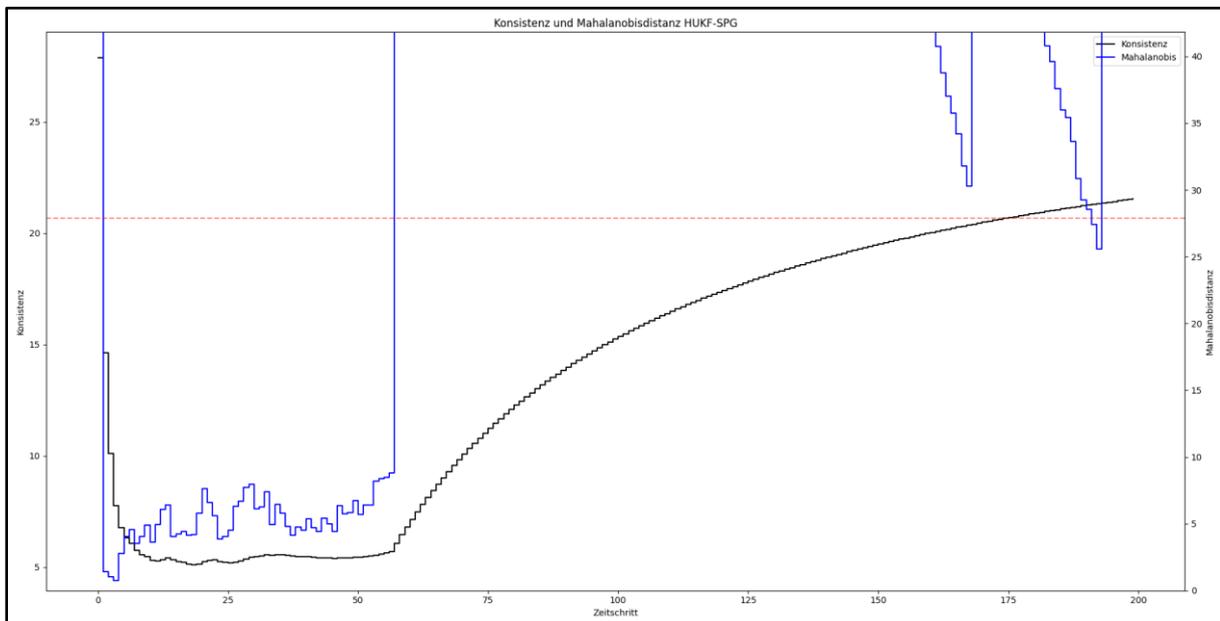


Abbildung 53: Problem mit Konsistenz bei geringem Prozessrauschen (Szenario 3D)

### 6.2.2.5 Kritisches Problem des UKF

Für bestimmte Parametersätze bzw. Testbedingungen weist der UKF ein Problem auf, bei dem die Schätzung des Filters bzw. die Sigmapunkte Werte annehmen, die nicht nur unplausibel weit von dem realen Wert entfernt sind, sondern auch zu numerischen Problemen führen. Dieses Verhalten tritt sporadisch in Momenten auf, in denen ein Aufprall stattfindet, und stellt ein Ausschlusskriterium für den Einsatz eines UKF für hybride, dynamische Systeme dar. In Abbildung 54 ist dieses Verhalten dargestellt. Es ist zu sehen, dass sich der Mittelwert des UKF (dunkelblaue Linie) sowie alle Sigmapunkte (hellblaue Linien) beim ersten Aufprall über alle Maßen vom realen Wert entfernen. Außerdem ist zu sehen, dass sich der UKF hiervon im weiteren Verlauf nicht mehr erholt. Der verwendete Parametersatz lautet wie folgt:

- Rauschen im Dynamikschritt:  $\sigma_v = 0,01 \frac{m}{s\sqrt{s}}$ ,  $\sigma_\omega = 1 \frac{^\circ}{s\sqrt{s}}$
- Rauschen im Messschritt:  $\sigma_w = 5$

- Messungen in jedem fünften Schritt
- Startgeschwindigkeit:  $(0, -5, 10) \frac{m}{s}$

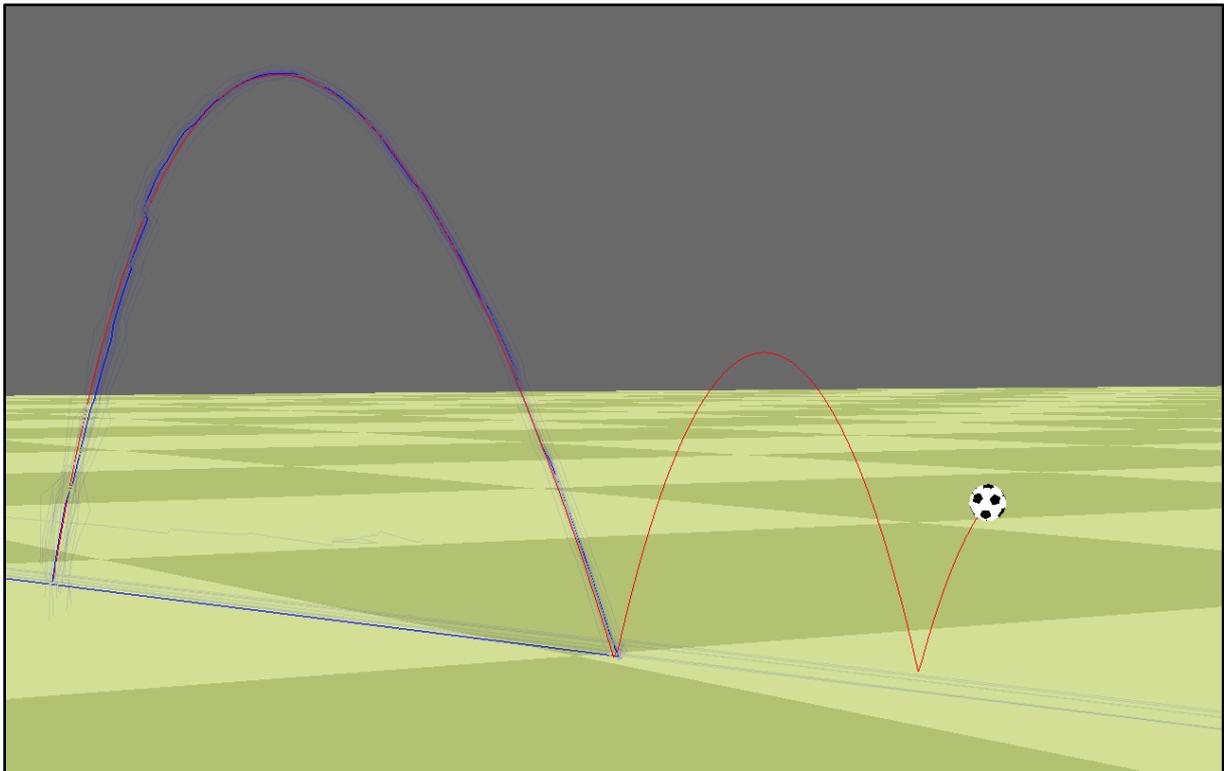


Abbildung 54 UKF scheitert an Dynamikgrenze (Szenario 3D)

### 6.3 Schlussfolgerung

Für die getesteten Szenarien und Parametersätze liefern der SKF und der HUKF-SPG die besten quantitativen Ergebnisse. Hierbei ist anzumerken, dass nur Parametersätze ausgewertet wurden, bei denen alle getesteten Kalman Filter Varianten plausible Werte lieferten. Der HUKF-SPG schätzt bei bestimmten Parametersätzen verhältnismäßig sehr kleine Unsicherheiten, die ggf. zu einem Versagen des Filters führen könnte. Der in dieser Arbeit vorgestellte UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten liefert ebenfalls gute quantitative Ergebnisse und darüber hinaus auch qualitative Ergebnisse, die auf eine gute Eignung dieses Filters für hybride, dynamische Systeme hindeuten. So reagiert dieser Filter in den Tests in der Nähe des Aufprallzeitpunkts mit großen Varianzen der Geschwindigkeit, womit die Unsicherheit des exakten Aufprallzeitpunktes und die damit einhergehende Unsicherheit der Geschwindigkeit repräsentiert wird. Diese Eigenschaft hebt den UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten sowohl vom SKF als auch vom HUKF-SPG ab.

Der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten bietet gegenüber dem SKF den Vorteil, dass bei der Modellierung und Implementierung weniger Aufwand nötig ist. Beim SKF müssen sowohl Jacobi-Matrizen der Dynamik- und Messmodelle für jeden Modus berechnet werden und für jeden Modusübergang eine entsprechende Saltation-Matrix. Dies führt abhängig von der Anzahl der Modi sowie der Komplexität der Modelle zu einem erheblichen Mehraufwand. Dies entfällt beim Einsatz des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten.

Der Vorteil des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (und des SKF) gegenüber dem HUKF-SPG ist vor allem zur Laufzeit des Programms zu erkennen. Beim HUKF-SPG muss das Dynamikmodell auf alle Sigmapunkte exakt so lange angewendet werden, bis deren Mittelwert die Guardbedingung erfüllt. Dies muss für komplexere Anwendungen numerisch erfolgen und ist je nach Komplexität sehr rechenintensiv. Die Komplexität dieser Aufgabe steigt mit zunehmender Komplexität der verwendeten Modelle und auch mit der Dimensionalität des Zustands, da dies zu einer größeren Anzahl an Sigmapunkten führt.

Für den UKF konnte gezeigt werden, dass dieser für die Zustandsschätzung hybrider, dynamischer Systeme ungeeignet ist. Zwar kann auch dieser Filter plausible Werte liefern, jedoch ist dies stark abhängig von den verwendeten Parametern, der Art und Anzahl der Unstetigkeiten und vor allem von häufigen und hinreichend präzisen Messungen. Der entscheidende Punkt, der den UKF für den Einsatz bei hybriden, dynamischen Systemen ausschließt, ist, dass dieser bei Modusübergängen fehlerhaft werden kann und so zu gravierend falschen und unplausiblen Zustandsschätzungen sowie kritischen Fehlern im Programmablauf und zum Absturz des Programms führt.

Der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten erweist sich somit als vielversprechender Ansatz, der Potential für weitergehende Untersuchung und ggf. Optimierungsmöglichkeiten bietet.

### 6.4 Ausblick

Im Folgenden werden Probleme und Potentiale des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten aufgeführt, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden konnten und weiterer Untersuchung bedürfen.

- Die hohen Mahalanobis-Distanzen, die beim UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten (und allen anderen untersuchten Filtern) in der Nähe des Aufprallzeitpunkts auftreten, deuten auf eine zu geringe Schätzung der Unsicherheit im Verhältnis zum tatsächlichen Fehler der Schätzung in diesen Momenten hin (vgl. Abschnitt 6.1.2.3). Die Erwartung bei der Entwicklung des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten war jedoch, dass dieser Effekt nicht mehr auftritt, da die zeitbeständigen Sigmapunten diese Unstetigkeiten bzw. Modusübergänge durch eine entsprechende Kovarianzmatrix repräsentieren können (vgl. Abschnitt 6.1.2.2). Zwar ist dieser Effekt bereits erkennbar, jedoch nicht ausreichend und zuverlässig. Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems könnte darin bestehen, dass gewichtete Sigmapunten eingesetzt werden, bei denen dafür gesorgt wird, dass diese ggf. einen bestimmten Mindestabstand zum Mittelwert aufweisen, sodass Unstetigkeiten bzw. Modusübergänge stets in der Kovarianz abgebildet werden können. In dem 3D-Szenario wäre dies insb. entlang der z-Achse relevant. Hierbei muss durch die Gewichtung der Sigmapunten sichergestellt werden, dass deren Kovarianz nicht von diesem Mindestabstand abhängt bzw. beeinflusst wird und den Anforderungen des UKF genügt.
- Die Kovarianz des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten nach dem Messschritt ist kleiner als beim UKF und daher wird jeder Sigmapunten im Nachhinein wie im Dynamikschritt so verändert, dass die Kovarianz der Sigmapunten korrigiert wird, ohne den Mittelwert zu verändern (vgl. Abschnitt 3.3). Hier stellt sich die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, bei der diese nachträgliche Korrektur entfällt und der Messschritt direkt die korrekte Kovarianz liefert.
- Um den UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten auch multi-modalen Ansätzen wie einem Interacting Multiple Model Ansatz (IMM) verwenden zu können, muss ein Verfahren entwickelt werden, das es bei der Zustandsinteraktion (state interaction) erlaubt, anstelle der gewichteten Summen des Mittelwerts und der Kovarianzen die gewichteten Summen der Sigmapunten der verschiedenen Filter so zu bestimmen, dass die „Identität“ jedes Sigmapunten erhalten bleibt, da sich der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten eben hierdurch auszeichnet.
- Es ist zu prüfen, ob der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten ohne Weiteres auf  $\boxplus$ -Mannigfaltigkeiten generalisiert werden kann. Dies würde die Einsatzmöglichkeiten dieses Filters weiter ausweiten.
- In dieser Arbeit wurde ein hybrides, dynamisches System mit nur einem Modus und einem Modusübergang untersucht. Es ist daher zu untersuchen, wie sich der UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten in Systemen mit mehr als einem Modus verhält und wie sich ein ggf. vorkommender Wechsel der Domäne auf die zeitbeständigen Sigmapunten auswirkt.
- Die Werte für die Konsistenz des UKF mit zeitbeständigen Sigmapunten deuten auf eine Schätzung der Kovarianz, die verhältnismäßig groß ist. Hier ist zu untersuchen, warum dies der Fall ist und ob dies verbessert werden kann.

## 7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein neuartiger Ansatz zur Zustandsschätzung hybrider, dynamischer Systeme entwickelt und evaluiert. Ausgangspunkt war die Herausforderung, dass klassische Kalman Filter Varianten wie der UKF nicht für die Zustandsschätzung hybrider, dynamischer Systeme geeignet sind.

Nach einer theoretischen Einführung in die Theorie der Kalman Filter, hybrider Systeme und bestehender hybrider Kalman Filter Varianten (Salted Kalman Filter, Hybrider Unscented Kalman Filter) wurde der Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten auf Grundlage des UKF entwickelt. Durch die Beibehaltung der Sigmoidpunkte über die Zeitschritte hinweg, wird die Zustandsschätzung hybrider, dynamischer Systeme ermöglicht. Zur Untersuchung des Ansatzes wurden zwei Szenarien simuliert: Ein eindimensionales Szenario, bei dem ein Ball unter Einfluss der Gravitation fällt, und am Boden mittels eines elastischen Stoßes abspringt und ein dreidimensionales Szenario, bei dem eine realitätsnahe Ballbewegung mit Luft- und Rollreibung, Magnus-Effekt sowie kamerabasierter Messung simuliert wird.

Die Auswertung zeigte, dass der entwickelte UKF mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten in der Lage ist, den Systemzustand auch bei Modusübergängen und über Dynamikgrenzen hinweg stabil und konsistent zu schätzen. Gegenüber dem Hybriden UKF mit Sigmoidpunkt-Generierung und dem Salted Kalman Filter erzielt der UKF mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten eine vergleichbare Genauigkeit bei einfacherer Implementierung und geringerer Abhängigkeit des Modellierungs- und Laufzeitaufwands von der Modellkomplexität.

Somit stellt der Unscented Kalman Filter mit zeitbeständigen Sigmoidpunkten einen vielversprechenden Ansatz zur Zustandsschätzung von hybriden, dynamischen Systemen dar.

## Literaturverzeichnis

- [Bit23] J. Bittler, P. A. Bhounsule; Hybrid Unscented Kalman Filter: Application to the Simplest Walker; Erschienen in IFAC-PapersOnLine (Vol. 56, Issue 3, Seiten 55-60); 2023
- [Fre25] Prof. Dr.-Ing. U. Frese; Methode zur Generierung von Sigmoidpunkten mittels der diskreten Kosinus-Transformation; bisher unveröffentlicht und vom Erstprüfer zur Verwendung in dieser Arbeit zur Verfügung gestellt; Universität Bremen; 2025
- [Goe09] R. Goebel, R. G. Sanfelice, Andrew R. Teel; Hybrid Dynamical Systems; Robust Stability and Control for Systems that combine continuous-time and discrete-time Dynamics; Erschienen in IEEE Control Systems Magazine; 2009
- [Har03] R. Hartley, A. Zisserman; Multiple View Geometry in Computer Vision; 2. Auflage; Cambridge University Press, New York, 2003
- [Her13] C. Hertzberg, R. Wagner, U. Frese, L. Schröder; Integrating Generic Sensor Fusion Algorithms with Sound State Representations through Encapsulation of Manifolds; Erschienen in Information Fusion (Vol. 14, Issue 1, Seiten 57-77); 2013
- [Jul97] S. J. Julier, J. K. Uhlmann; A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems; Erschienen in Proc. SPIE 3068; Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI; 1997
- [Kon24] N. J. Kong, J. J. Payne, J. Zhu, A. M. Johnson; Saltation Matrices: The Essential Tool for Linearizing Hybrid Dynamical Systems; Erschienen in Proceeding of the IEEE (Vol. 12, Issue 6, Seiten 585-608); 2024
- [Kon25] N. J. Kong, J. J. Payne, George Council, Aaron M. Johnson; The Salted Kalman Filter: Kalman Filtering on Hybrid Dynamical Systems; Heruntergeladen von <https://arxiv.org/abs/2007.12233v2> am 29.09.2025 um 14:25 Uhr
- [Mag19] J. R. Magnus, H. Neudecker; Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics; John Wiley & Sons; 2019
- [Mar24] R. Marchthaler, S. Dingler; Kalman-Filter: Einführung in die Zustandsschätzung und ihre Anwendung für eingebettete Systeme; 2. Auflage, Springer Vieweg; Wiesbaden; 2024
- [Mes90] N. de Mestre; The Mathematics of Projectiles in Sport; Cambridge University Press, Cambridge; 1990
- [Nak10] A. Nakashima, Y. Ogawa, Y. Kobayashi, Y. Hayakawa; Modeling of Rebound Phenomenon of a Rigid Ball with Friction and Elastic Effects; Erschienen in Proceedings of the 2010 American Control Conference; 2010

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	GUI für das 3D-Szenario .....	2
Abbildung 2:	Allgemeines hybrides, dynamisches System [Goe09] .....	6
Abbildung 3:	Kovarianz Propagation mit Saltation Matrix [Kon25].....	7
Abbildung 4:	HUKF Dynamikschritt [Bit23].....	9
Abbildung 5:	Lochkameramodell [Har03] .....	12
Abbildung 6:	Verschiebung des Bildmittelpunkts [Har03] .....	12
Abbildung 7:	GUI für 1D Szenario (Video: <a href="https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/4GAcfmyxyqSKrEz">https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/4GAcfmyxyqSKrEz</a> ).....	17
Abbildung 8:	Demo 3D-Szenario: UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Video: <a href="https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/p78zZr4WySikd8r">https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/p78zZr4WySikd8r</a> ) .....	29
Abbildung 9:	Demo 3D-Szenario: SKF (Video: <a href="https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/cbF4FgPa2rWpKMy">https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/cbF4FgPa2rWpKMy</a> ).....	30
Abbildung 10:	Demo 3D-Szenario: UKF (Video: <a href="https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/n3LCY9CW7f7TmRN">https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/n3LCY9CW7f7TmRN</a> ).....	30
Abbildung 11:	Demo 3D-Szenario: HUKF-SPG (Video: <a href="https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/cXjkbwr58kzQ4sX">https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/cXjkbwr58kzQ4sX</a> ).....	30
Abbildung 12:	Position UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D) .....	34
Abbildung 13:	Position SKF (Szenario 1D) .....	34
Abbildung 14:	Position UKF (Szenario 1D) .....	35
Abbildung 15:	Position HUKF-SPG (Szenario 1D).....	35
Abbildung 16:	Positionsfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D)....	36
Abbildung 17:	Positionsfehler SKF (Szenario 1D).....	36
Abbildung 18:	Positionsfehler UKF (Szenario 1D).....	37
Abbildung 19:	Positionsfehler HUKF-SPG (Szenario 1D).....	37
Abbildung 20:	Geschwindigkeit UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D) .	39
Abbildung 21:	Geschwindigkeit SKF (Szenario 1D) .....	39
Abbildung 22:	Geschwindigkeit UKF (Szenario 1D).....	40
Abbildung 23:	Geschwindigkeit HUKF-SPG (Szenario 1D).....	40
Abbildung 24:	Geschwindigkeitsfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D).....	41
Abbildung 25:	Geschwindigkeitsfehler SKF (Szenario 1D).....	41
Abbildung 26:	Geschwindigkeitsfehler UKF (Szenario 1D).....	42
Abbildung 27:	Geschwindigkeitsfehler HUKF-SPG (Szenario 1D) .....	42
Abbildung 28:	Konsistenz UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 1D).....	44
Abbildung 29:	Konsistenz SKF (Szenario 1D).....	44
Abbildung 30:	Konsistenz UKF (Szenario 1D).....	45
Abbildung 31:	Konsistenz HUKF-SPG (Szenario 1D) .....	45
Abbildung 32:	Geschwindigkeit UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten zum Sprungzeitpunkt (Szenario 1D) .....	46
Abbildung 33:	Position UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D) .....	50
Abbildung 34:	Position SKF (Szenario 3D) .....	50

Abbildung 35:	Position UKF (Szenario 3D) .....	51
Abbildung 36:	Position HUKF-SPG (Szenario 3D) .....	51
Abbildung 37:	Positionsfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D)....	52
Abbildung 38:	Positionsfehler SKF (Szenario 3D) .....	52
Abbildung 39:	Positionsfehler UKF (Szenario 3D).....	53
Abbildung 40:	Positionsfehler HUKF-SPG (Szenario 3D).....	53
Abbildung 41:	Geschwindigkeit UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D) .	55
Abbildung 42:	Geschwindigkeit SKF (Szenario 3D) .....	55
Abbildung 43:	Geschwindigkeit UKF (Szenario 3D) .....	56
Abbildung 44:	Geschwindigkeit HUKF-SPG (Szenario 3D).....	56
Abbildung 45:	Geschwindigkeitsfehler UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D) .....	57
Abbildung 46:	Geschwindigkeitsfehler SKF (Szenario 3D).....	57
Abbildung 47:	Geschwindigkeitsfehler UKF (Szenario 3D).....	58
Abbildung 48:	Geschwindigkeitsfehler HUKF-SPG (Szenario 3D) .....	58
Abbildung 49:	Konsistenz UKF mit zeitbeständigen Sigmapunkten (Szenario 3D).....	60
Abbildung 50:	Konsistenz SKF (Szenario 3D).....	60
Abbildung 51:	Konsistenz UKF (Szenario 3D).....	61
Abbildung 52:	Konsistenz HUKF-SPG (Szenario 3D) .....	61
Abbildung 53:	Problem mit Konsistenz bei geringem Prozessrauschen (Szenario 3D) ...	62
Abbildung 54	UKF scheitert an Dynamikgrenze (Szenario 3D) .....	63

## Anhang A: Datenträger

Der Datenträger, der dieser Arbeit beiliegt, enthält zum einen die digitale Version dieses Dokuments und zum anderen den vollständigen Python-Code, der im Rahmen dieser Arbeit erstellt wurde.

Zusätzlich sind diese Dateien unter folgendem Link abrufbar:

<https://nc.uni-bremen.de/index.php/s/xQwSTxKAbXQaiHy>

## Anhang B: Nutzung KI basierte Anwendungen

KI-basiertes Hilfsmittel	Einsatzform	Betroffene Teile der Arbeit	Beschreibung der Eingabe (Prompt)	Bemerkung
ChatGPT	Literaturüberblick zu Kalman Filtern und Kameramodellen	Kapitel 2: Stand der Technik	Erstelle mir eine Übersicht zu Standard-Literatur zu Kalman Filtern / Kameramodellen	
ChatGPT	Erstellung von Python-Codegerüst zur Visualisierung mittels Matplotlib	Python Code zur Generierung der Plots mittels Matplotlib in Anhang A: Anhang A: Datenträger	Erstelle mir Python-Code zur Visualisierung von zeit-diskreten Daten. Dabei sollen 5 Diagramme untereinander in einem Fenster angezeigt werden und dieselbe x-Achse verwenden.	