03-05-H
-709.53

Echtzeitbildverarbeitung (12)

Prof. Dr. Udo Frese

Zustandsschätzer

Partikelfilter

Mess- und Dynamikmodelle

Was bisher geschah

- **Quadratische Ausgleichsrechnung**
  - Berechnung der wahrscheinlichsten Parameter
    x = argmax_x P(X=x|Z=z) als = argmax_x P(Z=z | X=x).
  - „*Die wahrscheinlichsten Parameter, gegeben, dass ich gesehen habe, was ich gesehen habe sind die, bei denen es am wahrscheinlichsten ist, dass zu sehen, was ich gesehen habe.*“
  - Gauß´sches Messrauschen führt zu quadratischer Minimierung.

$$\hat{x} = \arg\min_x \sum_i \frac{\left(z_i - f_i(x)\right)^2}{\sigma_i^{\,2}}$$

- **Downhill Simplex Algorithmus**
  - Minimiert allgemeine Funktionen, einfach, ableitungsfrei aber langsam.
  - Zustand durch Simplex von n+1 Parametervektoren.
  - vier Operationen: reflection, expansion, contraction, multiple-contraction

Video 1

Zustandsschätzer

Quelle einiger der folgenden Folien (modifiziert) mit freundlicher Genehmigung von
Wolfram Burgard, Introduction to Mobile Robotics, Lecture 9, Universität Freiburg, 2005
http://ais.informatik.uni-freiburg.de/lehre/ss05/robotics/

Literatur: S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, Probabilistic Robotics, Kapitel 2, 4

Zustandsschätzer

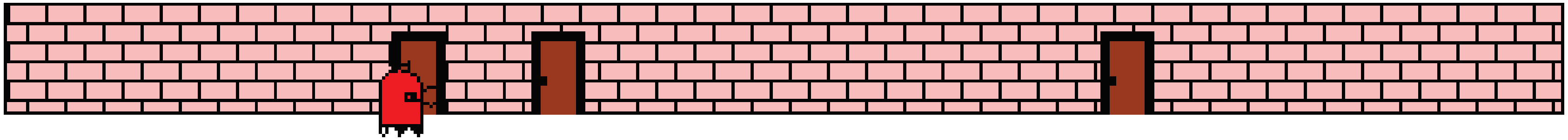
Überblick über diese und die folgende Vorlesung

- **Zustandsschätzer bestimmt möglichst genau einen sich zeitlich verändernden Zustand (X_t) aus Messungen über die Zeit (z_t,u_t).**
- **Vorlesung 12**
  - Zustandsschätzer
  - Partikelfilter
  - Mess- und Dynamikmodelle
- **Vorlesung 13**
  - Initialisierung
  - Resampling
  - Herleitung des Partikelfilter

Zustandsschätzer

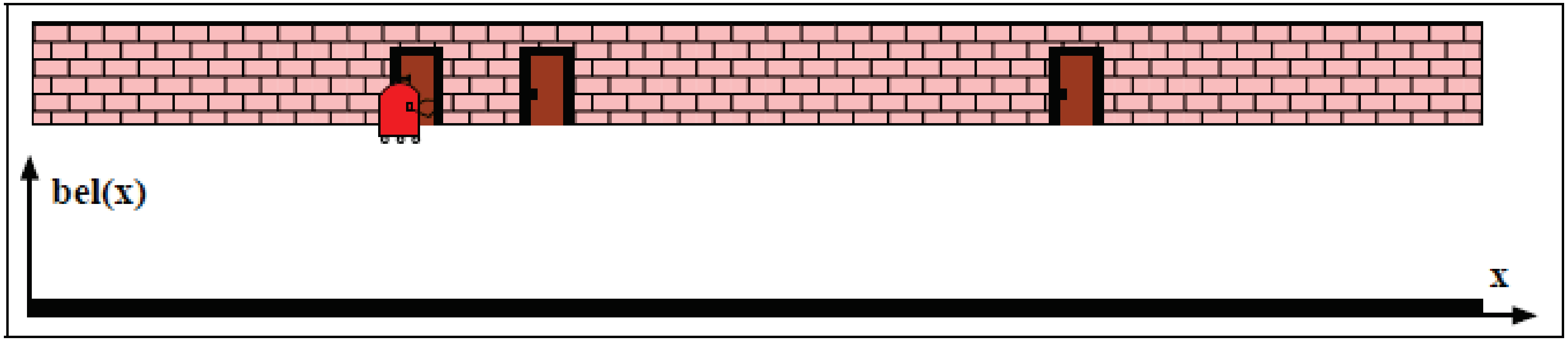
Beispiel für einen Zustandsschätzer: Lokalisation mit Türsensor

- Lokalisation eines Roboters mit Odometrie (Raddrehsensoren) und "Türsensor".
- was wir realisieren wollen, noch nicht, wie.
- gesuchter Zustand (X_t): Position des Roboters
- Quelle: Thrun et al., Probabilistic Robotics, 2005, MIT Press



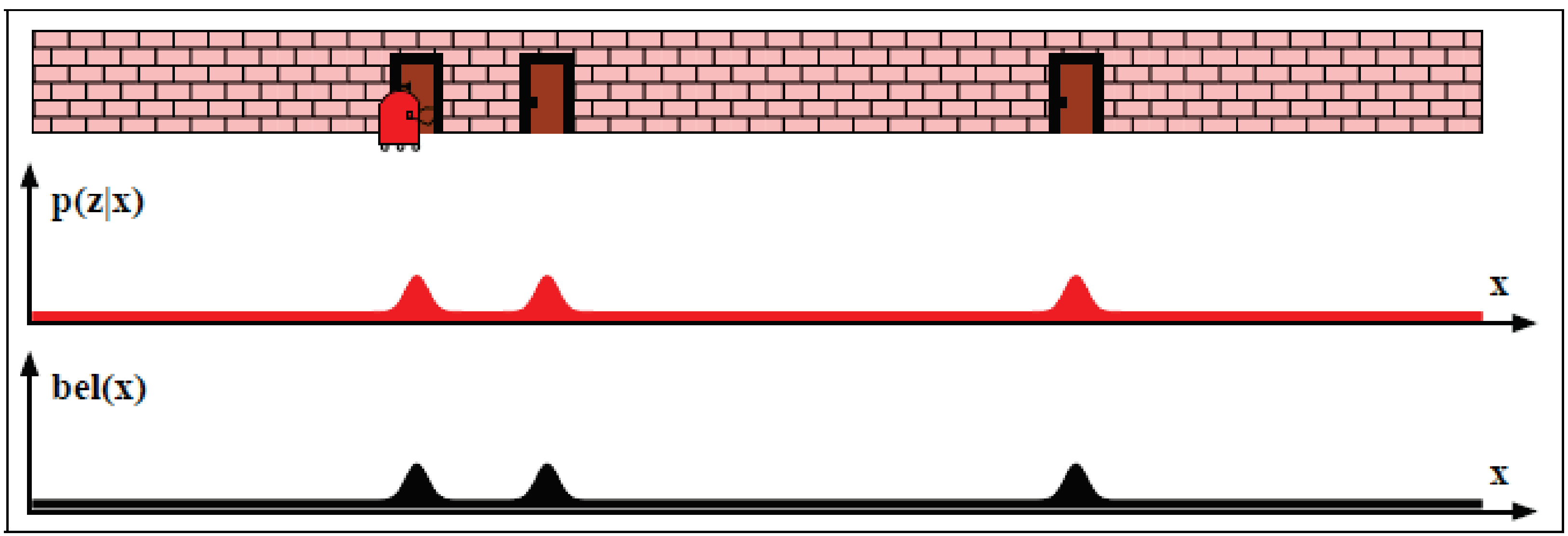
Zustand völlig unbekannt.

(a)

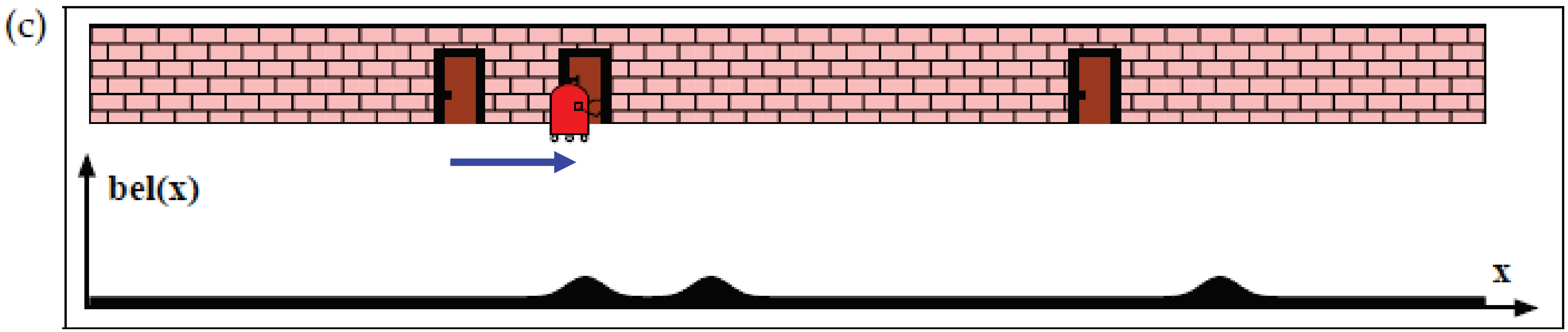


Messung z_1: Hier ist eine Tür.

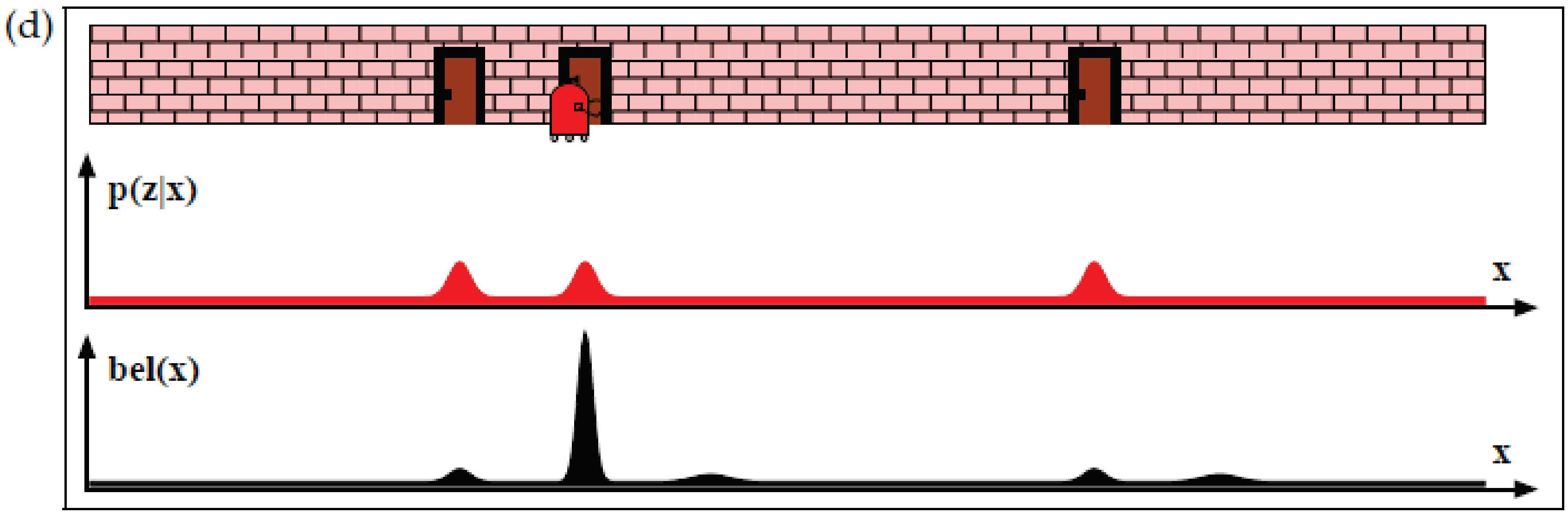
(b)



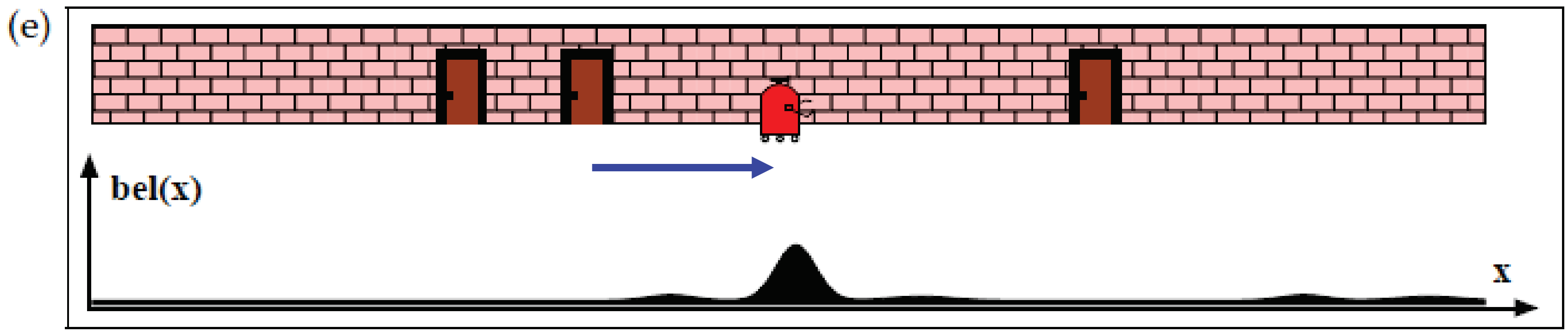
Dynamikmessung u_1: 1m vorwärts



Messung z_2: Hier ist eine Tür.



Dynamikmessung u_1: 1.5m vorwärts



Zustandsschätzer

<u>Aufgabenstellung für einen Zustandsschätzer</u>

- **Größe (X_t, Zustand) ändert sich über die Zeit**
- **unsichere Information über Zustand X_t durch Messung Z_t=z_t.**
  - *Markov Annahme 1 über z_t*
  - Messung z_t hängt nur vom Zustand X_t und Zufall ab.
  - oder: Zustand enthält alles, was neben Zufall die Messung beeinflusst.
- **unsichere Information über Änderung des Zustands X_t zu X_{t+1} durch Dynamikmessung U_t=u_t**
  - *Markov Annahme 2 über u_t*
  - Dynamikmessung u_t hängt nur von Zuständen X_t und X_{t+1} und Zufall ab.
  - oder: Vor- und Nachzustand enthalten alles, was neben Zufall die Dynamikmessung beeinflusst.

Zustandsschätzer

Frage an das Auditorium:

Welche Komponenten beinhalten im Beispiel „Lokalisation mit Türsensor“ von Thrun et al.…

- Zustand X_t
- Messung $Z_t=z_t$
- Dynamikmessung $U_t=u_t$

Zustandsschätzer

Frage an das Auditorium:

Welche Komponenten beinhalten im Beispiel „Lokalisation mit Türsensor“ von Thrun et al.…

- **Zustand X_t: Position im Gang**
- **Messung $Z_t=z_t$: Tür (z.B. 1) oder nicht Tür (z.B. 0)**
- **Dynamikmessung $U_t=u_t$: zurückgelegte Strecke seit letztem Schritt**

Zustandsschätzer

<u>Frage an das Auditorium</u>: Was könnte in der Realität die Markovannahme beim Beispiel „Lokalisation mit Türsensor“ beeinträchtigen?

- **Zustand X_t: Position im Gang**
- **Messung $Z_t=z_t$: Tür (z.B. 1) oder nicht Tür (z.B. 0)**
- **Dynamikmessung $U_t=u_t$: zurückgelegte Strecke seit letztem Schritt**
- ***Markov Annahme 1*: Messung z_t hängt nur vom Zustand X_t und Zufall ab.**
- ***Markov Annahme 2*: Dynamikmessung u_t hängt nur von Zuständen X_t und X_{t+1} und Zufall ab.**

Zustandsschätzer

<u>Frage an das Auditorium</u>: Was könnte in der Realität die Markovannahme beim Beispiel „Lokalisation mit Türsensor" beeinträchtigen?

- **Zustand X_t: Position im Gang**
- **Messung $Z_t=z_t$: Tür (z.B. 1) oder nicht Tür (z.B. 0)**
- **Dynamikmessung $U_t=u_t$: zurückgelegte Strecke seit letztem Schritt**
- ***Markov Annahme 1*: Messung z_t hängt nur vom Zustand X_t und Zufall ab.**
  - Problem: Tür offen oder zu (Zustand)
  - Tür an anderer Stelle als in der Karte
- ***Markov Annahme 2*: Dynamikmessung u_t hängt nur von Zuständen X_t und X_{t+1} und Zufall ab:**
  - Systematischer Odometriefehler, z.B. Rad schlecht aufgepumpt

Zustandsschätzer

Frage an das Auditorium: Beispiel: Verfolgen eines Autos mit Kamera auf dem Auto und senkrechten Pfosten als Landmarken. Welche Komponenten beinhalten

- Zustand X_t:
- Messung $Z_t=z_t$:
- Dynamikmessung $U_t=u_t$:

Zustandsschätzer

<u>Frage an das Auditorium</u>: Beispiel: Verfolgen eines Autos mit Kamera auf dem Auto und senkrechten Pfosten als Landmarken. Welche Komponenten beinhalten

- **Zustand: $X_t = (p_x, p_y, p_\Theta)$**
  - Position (p_x, p_y) [m],
  - Orientierung p_Θ [rad]
- **Messung: $z_t = (i_x)$, X-Koordinate einer senkrechten Linie im Bild**
- **Messung während des Dynamik: $u_t = (\psi, v)$,**
  - Lenkwinkel ψ [rad]
  - Geschwindigkeit v [m/s]

Zustandsschätzer

<u>Alternativlösung ohne Geschwindigkeitsmessung</u>

- **Zustand: $X_t = (p_x, p_y, p_\Theta, v)$**
  - Position (p_x, p_y) [m]
  - Orientierung p_Θ [rad]
  - Vorwärtsgeschwindigkeit v [m/s]
- **Körper in Ebene hätte 3 Geschwindigkeitskomponenten (v_x, v_y, v_Θ):**
  - v_x und v_y reduzieren sich auf v, weil ein Auto immer vorwärts fährt.
  - v_Θ ergibt sich aus v und dem Lenkwinkel.
- **Messung: $z_t = (i_x)$, X-Koordinate einer senkrechten Linie im Bild**
- **Dynamikmessung: $u_t = (\psi, m)$,**
  - Lenkwinkel ψ [rad]
  - Gas(>0) bzw. Bremse (<0). Ggf. Gang

Zustandsschätzer

Frage an das Auditorium: Beispiel: Verfolgen der Bewegung einer Billardkugel durch eine von oben blickende Kamera. (ohne Stöße, Drall und andere Kugeln) Welche Komponenten beinhalten

- Zustand X_t:
- Messung $Z_t=z_t$:
- Zustandsüber-gangsmessung $U_t=u_t$:

Zustandsschätzer

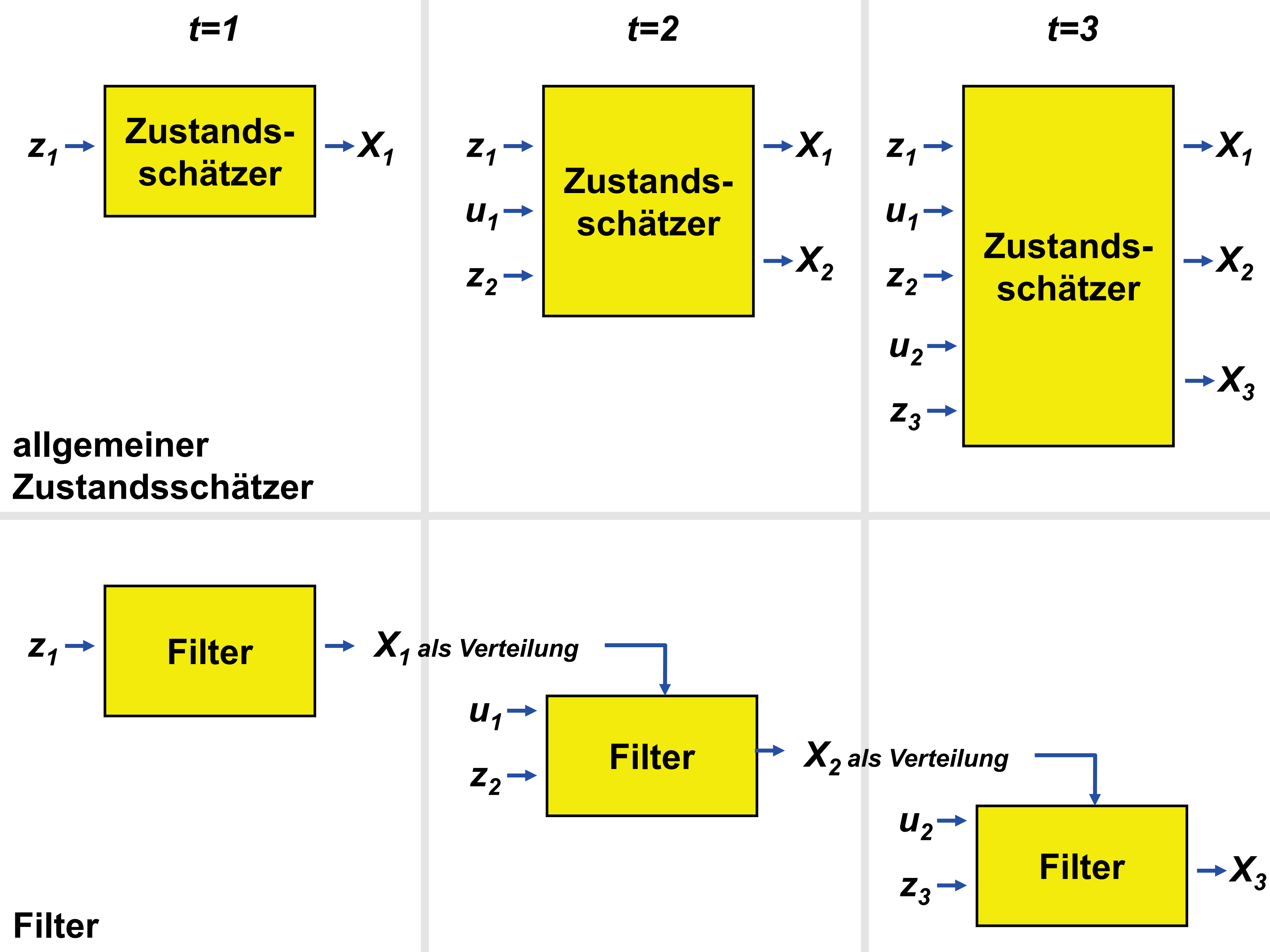
<u>Frage an das Auditorium</u>: Beispiel: Verfolgen der Bewegung einer Billardkugel durch eine von oben blickende Kamera. (ohne Stöße, Drall und andere Kugeln) Welche Komponenten beinhalten

- **Zustand: $X_t = (p_x, p_y, v_x, v_y)$**
  - Position [m] (p_x, p_y),
  - Geschwindigkeit (v_x, v_y). [m/s]
- **Messung: $z_t = (i_x, i_y)$ [Pixel] Position der Kugel im Kamerabild.**
- **Dynamikmessung: $u_t = ()$ leer.**
- **aber Bewegung des Balls in der Gleichung für Dynamikmessung.**

Zustandsschätzer

Warum „Filter“?

- **Name „Filter“ aus E-Technik („Tiefpassfilter“)**
- **dynamische Situationen mit sich ändernden Zustand und hinzukommenden Messungen.**
- **Problem: alte Messungen geben Information, aber erhöhen Rechenaufwand.**
  - nur aktueller Zustand interessant, …
  - …, aber mit aller indirekten Information aus vergangen Zustände und Messungen
- **Filter schätzt fortlaufend (rekursiv) aktuellen Zustand bei hinzukommenden Messungen.**
  - Grundidee: Wegen Markovannahmen aus der Vergangenheit nur Information über den letzten Zustand benötigt… (Beweis nächste Vorlesung)
  - als Verteilung des letzten Zustandes gegeben alle bisherigen Messungen: $p(X_t=x_t | Z_t=z_t, U_{t-1}=u_{t-1}, Z_{t-1}=z_{t-1}, \ldots, Z_1=z_1, U_0=u_0, Z_0=z_0)$



t=1
t=2
t=3
z1
Zustands-schätzer
X1
z1
u1
z2
Zustands-schätzer
X1
X2
z1
u1
z2
u2
z3
Zustands-schätzer
X1
X2
X3
allgemeiner Zustandsschätzer
z1
Filter
X1 als Verteilung
u1
z2
Filter
X2 als Verteilung
u2
z3
Filter
X3
Filter

Partikelfilter

Partikelfilter

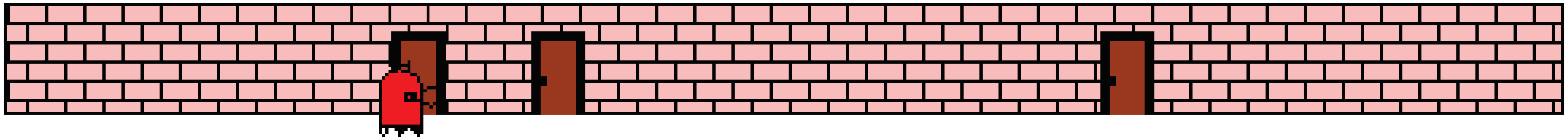
Grundidee des Partikelfilter

- **Darstellung der Zustandsverteilung $p(X_t=x)$ durch n zufällig gezogene Stichproben (Partikel)**
  - Algorithmus verwendet Zufallszahlen (Monte Carlo Simulation).
  - Partikel ist Hypothese: „Angenommen dies ist der Zustand“
  - Partikel hat Gewicht und „zählt“ proportional zum Gewicht.
- **hohe Wahrscheinlichkeit dargestellt durch**
  - viele Partikel mit niedrigem Gewicht
  - wenige Partikel mit hohem Gewicht
- **aber, viele Partikel mit ähnlichem Gewicht besser**
- **$\Rightarrow$Partikel konzentrieren sich, wo es wahrscheinlich ist**

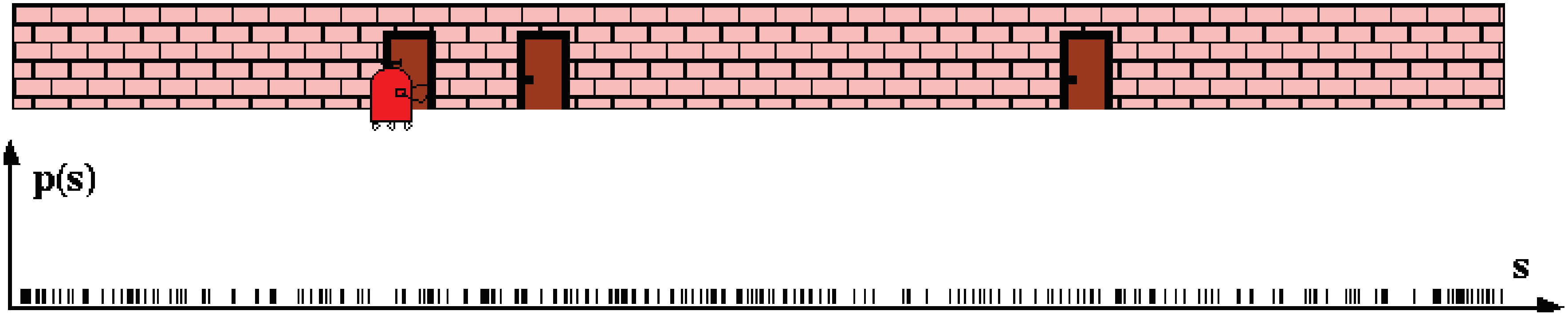
Partikelfilter

Das Lokalisationsbeispiel mit Partikelfilter
Quelle: Thrun et al., Probabilistic Robotics

Anfangsverteilung über den Zustand x_0

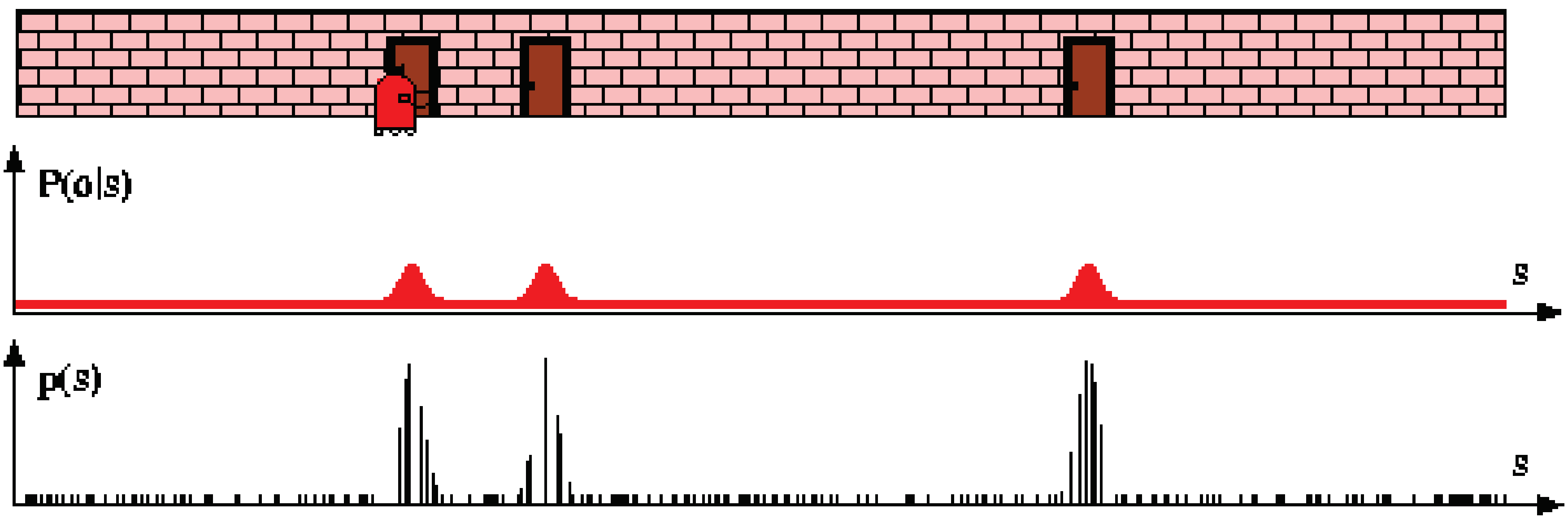


Anfangssituation: Der Zustand ist völlig unbekannt.



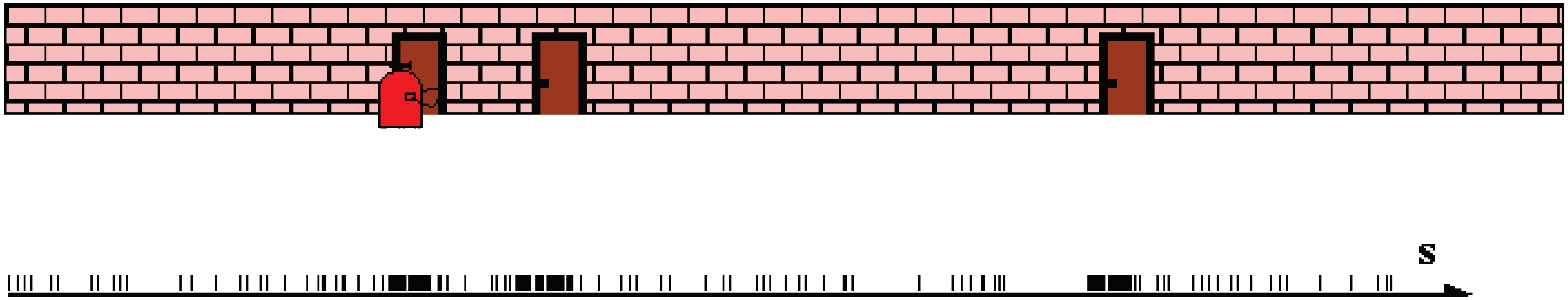
Ziehe Partikel zufällig im Wertebereich des Zustandes

Messung z_1: Hier ist eine Tür.



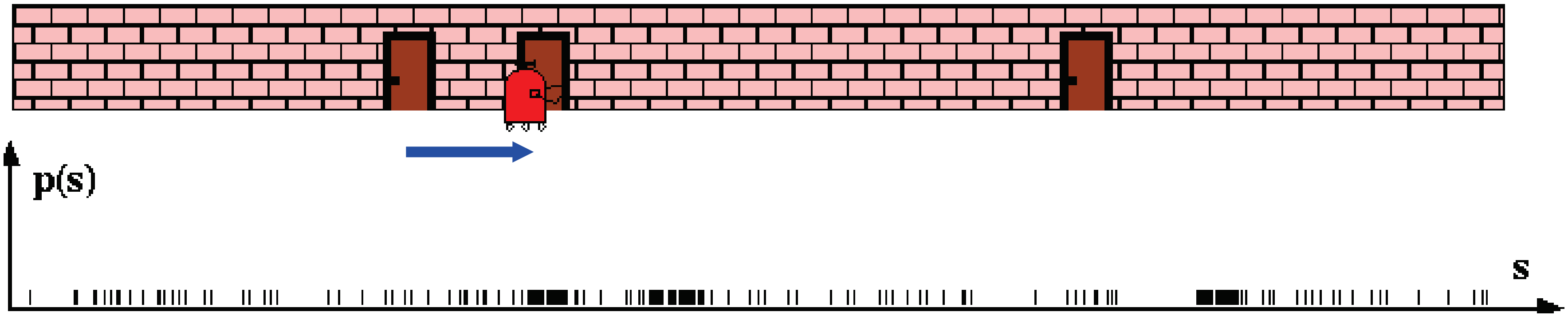
Nimm Gewichte mit der jeweiligen Plausibilität der Messung mal.

Resampling:



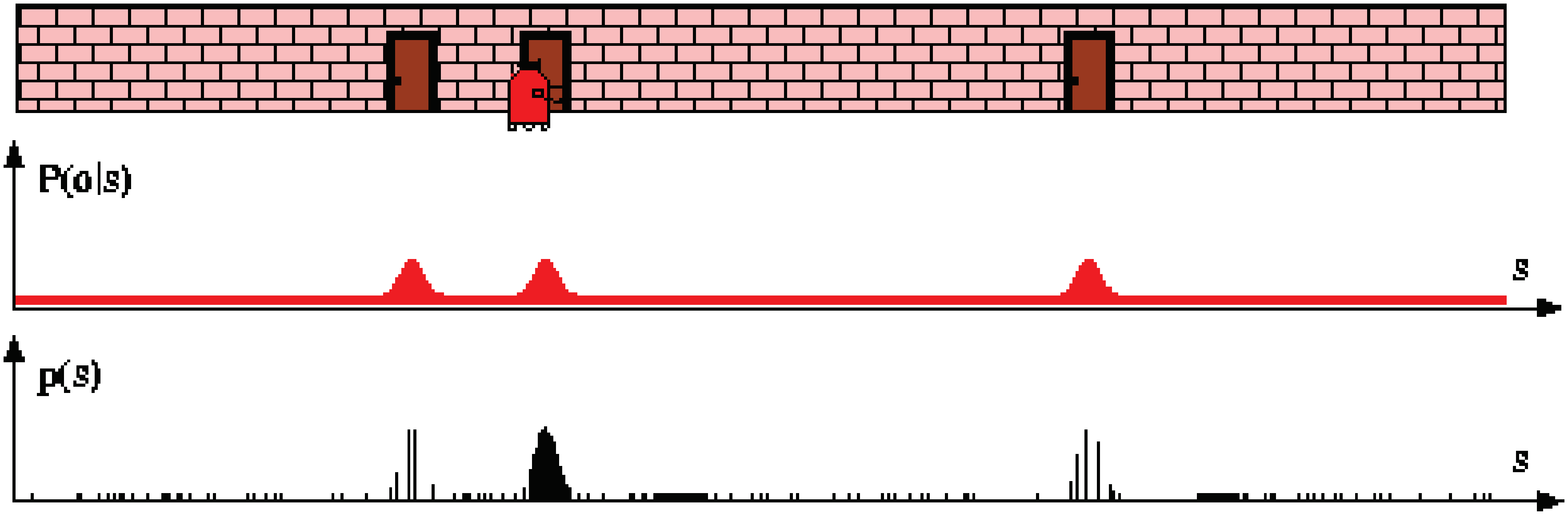
Ziehe zufällig neue Partikel aus der Menge der alten Partikel mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zum Gewicht.

Dynamikmessung u_1: 1m vorwärts



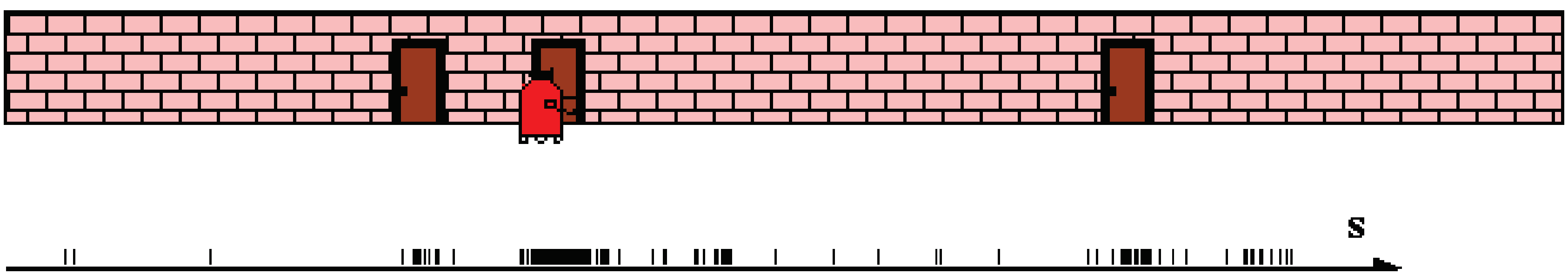
Bewege Partikel gemäß dem Dynamikmodell. Bringe dabei Unsicherheit im Bewegungsmodell als Zufallszahl in jeden Partikel unabhängig ein.

Messung z_2: Hier ist eine Tür.



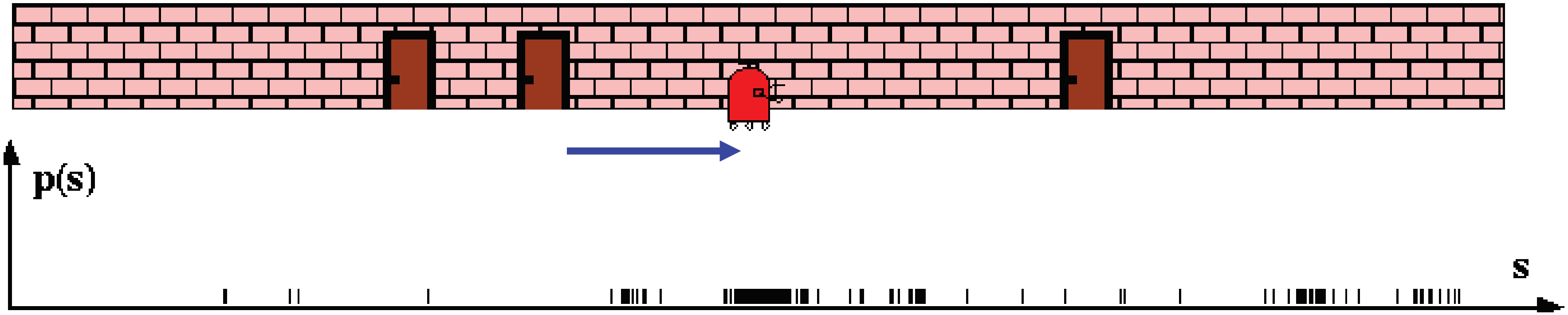
Nimm Gewichte mit der jeweiligen Plausibilität der Messung mal.

Resampling



Ziehe zufällig neue Partikel aus der Menge der alten Partikel mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zum Gewicht.

Dynamikmessung u_1: 1.5m vorwärts



Bewege Partikel gemäß dem Dynamikmodell. Bringe dabei Unsicherheit im Bewegungsmodell als Zufallszahl in jeden Partikel unabhängig ein.

Partikelfilter

- **Schritte eines Partikelfilters im Überblick**
  - *Initialisierung*: Ziehe zufällig Partikel aus dem Zustandsraum (Verfeinerung später).
  - *Messschritt*: Nimm Gewichte mit der jeweiligen Plausibilität der Messung mal.
  - *Resampling*: Ziehe zufällig neue Partikel aus der Menge der alten Partikel mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zum Gewicht. (nächste Vorlesung)
  - *Dynamikschritt*: Bewege Partikel gemäß dem Dynamikmodell. Bringe dabei Unsicherheit als Zufallszahl in jeden Partikel unabhängig ein.
- **<u>Frage an das Auditorium</u>: Was bedeuten die einzelnen Schritte anschaulich aus der Perspektive „Was weiß der Roboter?“**

Partikelfilter

- **<u>Frage an das Auditorium</u>: Was bedeuten die einzelnen Schritte anschaulich aus der Perspektive „Was weiß der Roboter?“**
  - *Initialisierung*: Der Roboter weiß nichts.
  - *Messschritt*: Der Roboter weiß, dass bestimmte Zustände jetzt plausibler sind.
  - *Resampling*: Der Roboter weiß dasselbe wie vorher, aber anders dargestellt. Konzentriert seine Denkresourcen auf wahrscheinliche Situationen.
  - *Dynamikschritt*: Der Roboter weiß, wenn er vorher dort war, ist er jetzt ungefähr hier. Dadurch schreibt sich sein Wissen fort, wird aber leicht unsicherer.

Partikelfilter

Partikelfilter (Dynamik- und Messschritt)

- Initialisierung und Resampling nächste Vorlesung

```
move (vector<Particle>& p, u) { // Apply change state (dynamic) model
   for (int i=0; i<p.size(); i++)
      p[i] = draw from p(x_t|x_{t-1},u) with x_{t-1}=p[i].
}

observe (vector<Particle>& p, z) { // Integrate measurement z
   for (int i=0; i<p.size(); i++)
      p[i].weight *= p(z|x_t) with x_t = p[i];
}
```

Partikelfilter

Partikelfilter (Dynamik- und Messschritt)

- Initialisierung und Resampling nächste Vorlesung
- Für konkretes Problem entsprechende Datenstruktur bzw. Formel für Zustand, (Zustandüberangs-)messung und Modell-Verteilungen

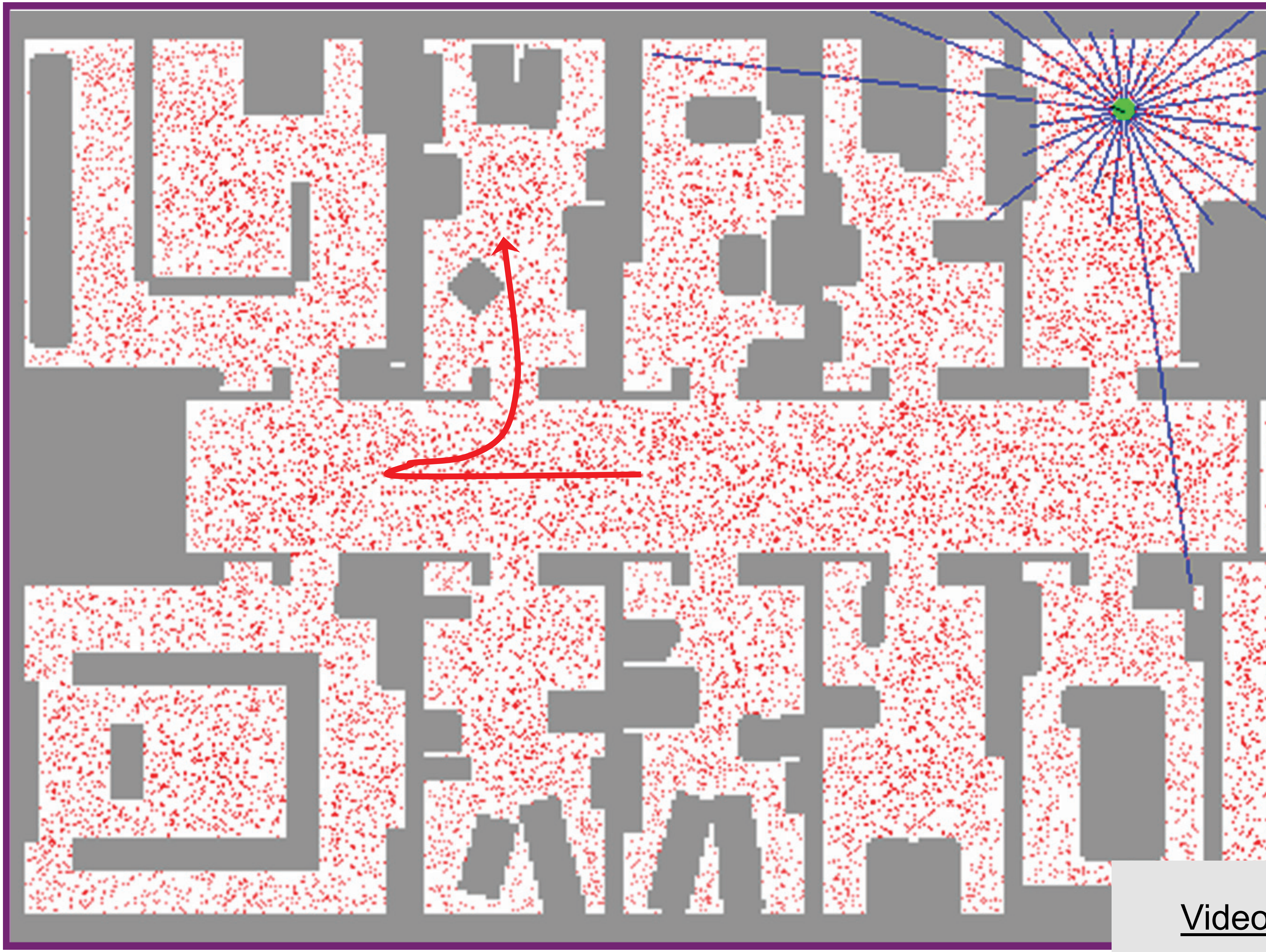
```
move (vector<Particle>& p, u) {  // Apply change state (dynamic) model
   for (int i=0; i<p.size(); i++)
      p[i] = draw from p(x_t|x_{t-1},u) with x_{t-1}=p[i].
}

observe (vector<Particle>& p, z) {  // Integrate measurement z
   for (int i=0; i<p.size(); i++)
      p[i].weight *= p(z|x_t) with x_t = p[i];
}
```

Partikelfilter

- **Vorteile:**
  - einfach zu implementieren.
  - nicht beschränkt auf Gauss´sche Verteilungen.
  - ausgesprochen erfolgreich in der Praxis.
- **Nachteil:**
  - schwierig in hochdimensionalen Zustandsräumen, weil viele Partikel benötigt.
  - teilweise weniger genau, abhängig von der Anzahl Partikel.
- **Entwicklungsgeschichte:**
  - Filtering: [Rubin, 88], [Gordon et al., 93], [Kitagawa 96]
  - Computer vision: [Isard and Blake 96, 98]
  - Dynamic Bayesian Networks: [Kanazawa et al., 95]
  - Mobile Robotics: [Burgard et al.,00]

Monte Carlo Lokalisierung mit Ultraschall Sensoren



Video 1

Mess- und Dynamikmodelle

Mess- und Dynamikmodelle

Wie kommt man zur Messverteilung $p(Z_t=z_t|X_t=x_t)$?

- **gesucht: Formel zum Auswerten der Wahrscheinlichkeit**
- **konstanter Faktor egal**
- **für „gut definierte" Sensoren (z.B. Bildverarbeitung)**
- **Messfunktion plus Gaußsches Rauschen**
- **$Z_t=z_t$ Messung, X_t Zustand.**
- **Formeln auch für vektorielles z_t.**
- **analog zur quadratischen Ausgleichsrechnung**
  - Messfunktion $f(X_t)$
  - $Z_t=f(X_t)+N_t$
  - Idealer Messwert, plus Rauschen
  - Gaußsches Rauschen für N_t
  - Erwartungswert 0, Standardabweichung σ

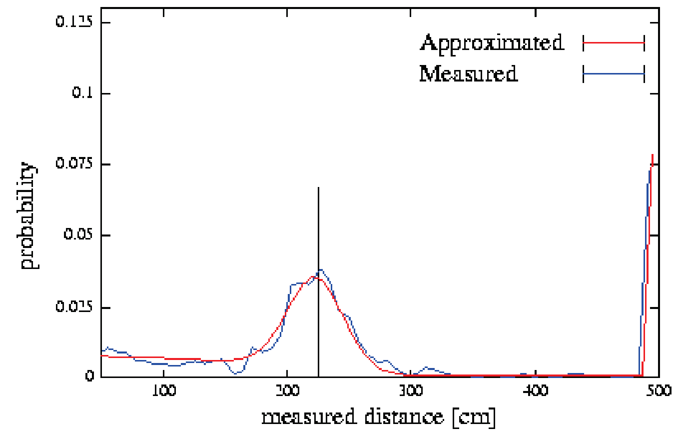
$$P\left(Z_t = z_t \middle| X_t = x_t\right) \propto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_t - f(x_t))^2}{2\sigma^2}}$$

Mess- und Dynamikmodelle

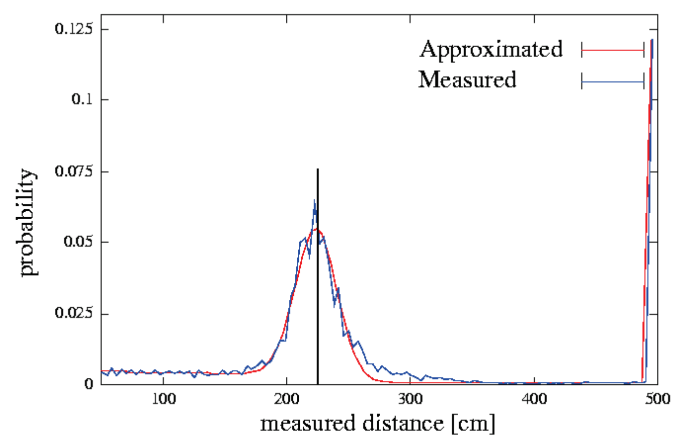
Wie kommt man zur Messverteilung $p(Z_t=z_t|X_t=x_t)$?

- für „schlecht definierte“ Sensoren
- Wahrscheinlichkeiten experimentell bestimmen und tabellieren
- spezielle Ansätze für spezielle Situation
- Partikelfilter mit beliebigen Verteilungen
- anders, als z.B. Kalman Filter

Ultraschall



Laserscanner



Mess- und Dynamikmodelle

Frage an das Auditorium: Was ist $p(Z_t=z_t|X_t=x_t)$ beim Billardproblem?

- **Zustand: $x_t = (p_x, p_y, v_x, v_y)$**
  - Position [m] (p_x, p_y),
  - Geschwindigkeit (v_x, v_y). [m/s]
- **Messung: $z_t = (i_x, i_y)$ [Pixel] Position der Kugel im Kamerabild.**

Mess- und Dynamikmodelle

Frage an das Auditorium: Was ist $p(Z_t=z_t|X_t=x_t)$ beim Billardproblem?

- **Meßfunktion plus Gaußsches Rauschen**
- **perfekt justierte Kamera mit optischer Achse auf Mittelsenkrechte zum Tisch**

$$f(p_x, p_y, v_x, v_y) = p_{center} + \frac{f_{eff}}{Z}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = const + const\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

$$P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \propto e^{-\frac{(z - f(p_x, p_y, v_x, v_y))^2}{2\sigma^2}}$$

Mess- und Dynamikmodelle

Wie kommt man zur Dynamikvert. $p(X_t=x_t|X_{t-1}=x_{t-1},U_{t-1}=u_{t-1})$?

- **X_{t-1} alter Zustand, X_t neuer Zustand, $U_{t-1}=u_{t-1}$ Messung / Kommando**
- **Wichtig: nicht Formel zum auswerten von $P(X_t|x_{t-1},u_{t-1})$, sondern Vorschrift zum ziehen aus $P(X_t|x_{t-1},u_{t-1})$ gesucht.**
- **Simulation mit Zufall**
- **Für gut definierte Vorgänge zuerst Nominalverhalten (ohne Fehler):**
  - Physik mit Differentialgleichung modellieren.

$$\dot{x}(t) = g(x(t))$$

  - Differentialgleichung analytisch lösen (Übung).
  - einen Δt Schritt eines numerischen Differentialgleichungslösers.
  - einfach Ableitungen für Δt als konstant annehmen (Euler-Integration)

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \Delta t \dot{x}(t) = x(t) + \Delta t g(x(t))$$

Mess- und Dynamikmodelle

Frage an das Auditorium: Was ist das nominale Zustandsüber-gangsmodell (ohne Rauschen) für das Billard Problem?

- **Zustand: $x = (p_x, p_y, v_x, v_y)$**
  - Position [m] (p_x, p_y),
  - Geschwindigkeit (v_x, v_y). [m/s]
- **Dynamikmessung: $u = ()$ leer.**

Mess- und Dynamikmodelle

<u>Frage an das Auditorium</u>: Was ist das nominale Zustandsübergangsmodell (ohne Rauschen) für das Billard Problem?

- **Position ändert sich gemäß Geschwindigkeit**
- **Geschwindigkeit ändert sich proportional zu Kraft, hier Reibung**
- **Reibung ist konstante Kraft gegen Bewegungsrichtung**

$$\dot{p}_x = v_x, \qquad \dot{p}_y = v_y$$

$$\dot{v}_x = -\alpha \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \dot{v}_y = -\alpha \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

- **Euler Integration (wenn $\alpha\Delta T < \sqrt{v_x^2+v_y^2}$)**

$$p_{x,t+1} = p_{x,t} + \Delta t\, v_{x,t} \qquad p_{y,t+1} = p_{y,t} + \Delta t\, v_{y,t}$$

$$v_{x,t+1} = v_{x,t} - \alpha\Delta t \frac{v_{x,t}}{\sqrt{v_{x,t}^2 + v_{y,t}^2}} \qquad v_{y,t+1} = v_{y,t} - \alpha\,\Delta t \frac{v_{y,t}}{\sqrt{v_{x,t}^2 + v_{y,t}^2}}$$

- **Sonst $v_x=v_y=0$**

Mess- und Dynamikmodelle

Wie kommt man zur Dynamikvert. $p(X_t=x_t|X_{t-1}=x_{t-1},U_{t-1}=u_{t-1})$?

- **Unsicherheit durch addieren von Gaußschem Rauschen**
- **Wie großes Rauschen?**
  - Prinzip: Das Verhalten des Systems sollte (näherungsweise) von der Schrittweite Δt unabhängig sein.
  - beim addieren unabhängiger Gaussglocken addieren sich die *Varianzen*, nicht die *Standardabweichungen*
  - $\Rightarrow$ addiere Rauschen $\propto\sqrt{\Delta t}$, nicht $\propto\Delta t$
- **Addiere $\propto\sqrt{\Delta t}\,\sigma n$, mit n aus Standard-Gaußverteilung**
  - mit σ Rauschen, dass sich in t=1 aufakkumuliert

Mess- und Dynamikmodelle

<u>Frage an das Auditorium</u>: Was ist das Dynamikmodell (mit Rauschen) für das Billard Problem?

$$p_{x,t+1} = p_{x,t} + \Delta t\, v_{x,t}$$

$$p_{y,t+1} = p_{y,t} + \Delta t\, v_{y,t}$$

$$v_{x,t+1} = v_{x,t} - \alpha \Delta t \frac{v_{x,t}}{\sqrt{{v_{x,t}}^2 + {v_{y,t}}^2}}$$

$$v_{y,t+1} = v_{y,t} - \alpha\, \Delta t \frac{v_{y,t}}{\sqrt{{v_{x,t}}^2 + {v_{y,t}}^2}}$$

Mess- und Dynamikmodelle

<u>Frage an das Auditorium</u>: **Was ist das Dynamikmodell (mit Rauschen) für das Billard Problem?**

- **Kein Rauschen auf die Position, weil auf ein physisches Objekt eine Störkraft wirkt, keine spontane Störgeschwindigkeit.**
- **α uniform aus $[\alpha_{min} \ldots \alpha_{max}]$ ziehen**
- **Zwei unabhängige Std.-Gauß Zufallszahlen n_1, n_2 ziehen**
- **Mit $\sqrt{\Delta t}\sigma$ malgenommen addieren**
- **Wenn $\alpha \Delta T > \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, setze $v_x = v_y = 0$**

$$p_{x,t+1} = p_{x,t} + \Delta t\, v_{x,t}$$

$$p_{y,t+1} = p_{y,t} + \Delta t\, v_{y,t}$$

$$v_{x,t+1} = v_{x,t} - \alpha \Delta t \frac{v_{x,t}}{\sqrt{v_{x,t}^{\,2} + v_{y,t}^{\,2}}} + \sqrt{\Delta t}\, \sigma\, n_1$$

$$v_{y,t+1} = v_{y,t} - \alpha\, \Delta t \frac{v_{y,t}}{\sqrt{v_{x,t}^{\,2} + v_{y,t}^{\,2}}} + \sqrt{\Delta t}\, \sigma\, n_2$$

Zusammenfassung

- **Situation: Dynamisches System mit sich änderndem Zustand X_t und gegebener Messung z_t und Dynamikmessung u_t.**
  - alle Messungen tragen zur Information über X_t bei, nicht nur z_t.
  - Markov Annahme: z_t nur abhängig von X_t, u_t von X_t und X_{t+1}
  - $\Rightarrow$ Verteilung von X_t enthält alle Information von $z_{1..t}$, $u_{1..t-1}$
- **rekursiver Schätzer berechnet aus Verteilung von X_{t-1} in die Verteilung von X_t.**
- **Partikelfilter repräsentiert Verteilung durch gewichtete zufällige Stichproben (Partikel) im Zustandsraum.**
- **Messschritt: Gewichte der Partikel mit $p(Z_t=z_t|X_t=x_t)$**
  - praktisch für Bildverarbeitung: Gausscher Messfehler
- **Dynamikschritt: Ziehe aus $p(X_t|X_{t-1},u_t)$ wobei X_{t-1} aus Partikel**
  - praktisch: nominales Bewegungsmodell plus Rauschen
- **Literatur: S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, Probabilistic Robotics, (2,4)**