03-05-H
-709.53

Echtzeitbildverarbeitung (13)

Prof. Dr. Udo Frese

Initialisierung
Resampling
Herleitung Partikelfilter

Was bisher geschah

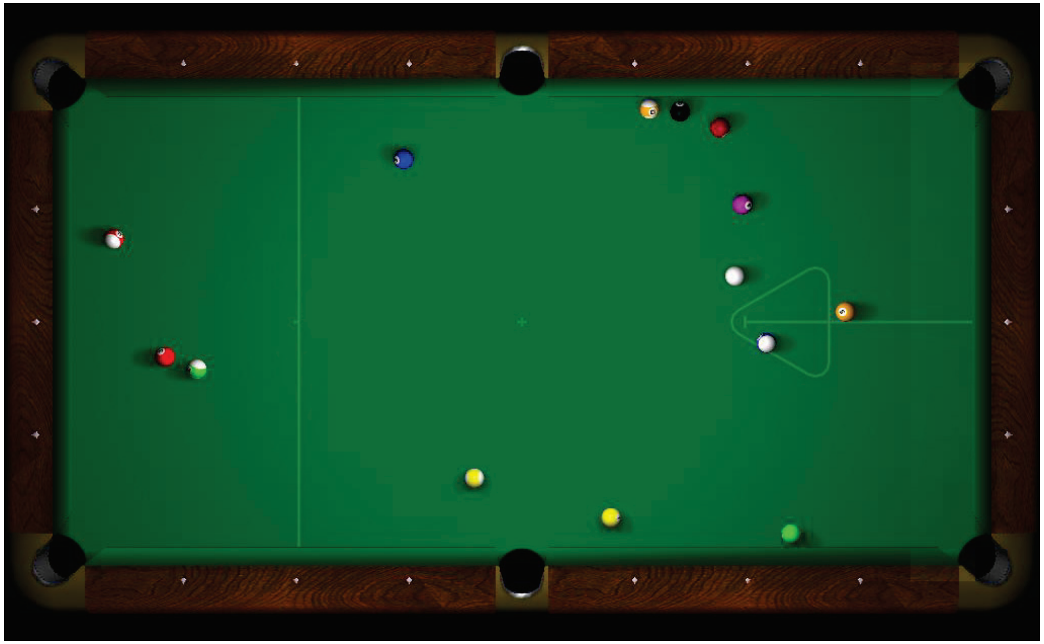
- **Situation: Dynamisches System mit sich änderndem Zustand X_t und gegebener Messung z_t und Dynamikmessung u_t.**
  - alle Messungen tragen zur Information über X_t bei, nicht nur z_t.
  - Markov Annahme: z_t nur abhängig von X_t, u_t von X_t und X_{t+1}
  - $\Rightarrow$ Verteilung von X_t enthält alle Information von $z_{1..t}$, $u_{1..t-1}$
- **rekursiver Schätzer berechnet aus Verteilung von X_{t-1} in die Verteilung von X_t.**
- **Partikelfilter repräsentiert Verteilung durch gewichtete zufällige Stichproben (Partikel) im Zustandsraum.**
- **Messschritt: Gewichte der Partikel mit $p(Z_t=z_t|X_t=x_t)$**
  - praktisch für Bildverarbeitung: Gausscher Messfehler
- **Dynamikschritt: Ziehe aus $p(X_t|X_{t-1},u_t)$ wobei X_{t-1} aus Partikel**
  - praktisch: nominales Bewegungsmodell plus Rauschen
- **Literatur: S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, Probabilistic Robotics, (2,4)**

Initialisierung

Initialisierung

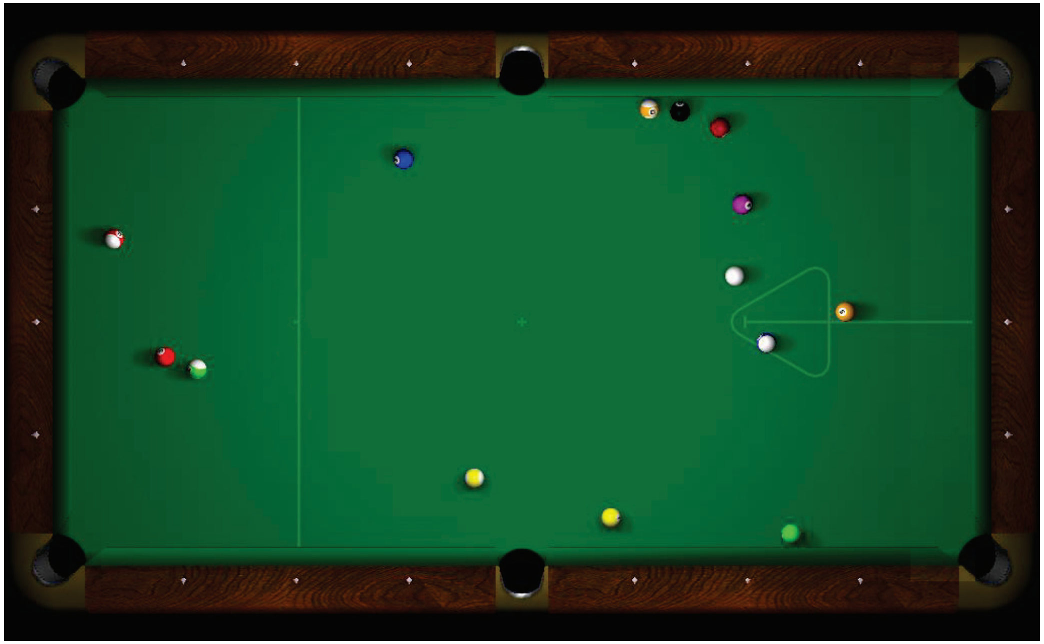
Einfachster Ansatz

- ziehen aus der a-priori Verteilung
- gleichverteilte zufällige Partikel
- Frage an das Auditorium: Wie viele Partikel braucht man im Billard Beispiel um den Zustandsraum halbwegs abzudecken? (ganz grob)



Initialisierung

- Frage an das Auditorium: Wie viele Partikel braucht man im Billard Beispiel um den Zustandsraum halbwegs abzudecken? (ganz grob)
- sagen wir: Alle 1cm, bzw. alle 5cm/s
- also $(3m/1cm)*(1.5m/1cm)*(5m/s/1cm/s)^2 = 450$ Mio.



Initialisierung

Ziehen aus der a-posteriori Verteilung

- **a-posteriori Verteilung nach einer Messung: $P(X_1|z_1) \propto P(z_1|X_1)P(X_1)$.**
- **Was passiert?**
  - ziehen aus $P(X_1)$
  - gewichten mit $P(z_1|x_1)$
  - resampling
- **wenn $P(X_1)$ als a-priori Wissen gleich verteilt, haben die meisten Partikel fast Gewicht 0**
  - $\Rightarrow$ineffizient

Initialisierung

Ziehen aus der a-posteriori Verteilung

- **besser: Partikel mit erster Messung initialisieren.**
  - ziehen aus $P(X_1|z_1)$
  - $P(X_1|z_1) \propto P(z_1|X_1)P(X_1)$.
- **für $P(X_1)$ konstant**
  - $P(X_1|z_1) \propto P(z_1|X_1)$
  - $P(z_1|X_1)$ als Verteilung von X_1 für festes z_1 sehen
  - daraus ziehen
- **für $P(X_1)$ nicht konstant**
  - mit $P(X_1)$ gewichten
  - besonders unmögliche ($P(X_1)=0$) verwerfen

Initialisierung

Ziehen aus der a-posteriori Verteilung

- **Zustand und Messung gleiche Dimension und Nominalfunktion plus Rauschen**
  - $z=f(x)+n$ mit invertierbarem f
  - Rauschwerte n ziehen und von Messung z abziehen.
  - Zustand als $f^{-1}(z-n)$ ausrechnen.
- **Zustand höhere Dimension als Messung**
  - mehrere Messungen für Initialisierung nötig
  - soviele, wie nötig nehmen,
  - verrauschen
  - daraus Zustand ausrechnen

Initialisierung

Frage an das Auditorium: Wie initialisiert man den Partikelfilter für das Billard Problem?

- **Zustand: x = (p_x, p_y, v_x, v_y)**
  - Position [m] (p_x, p_y),
  - Geschwindigkeit (v_x, v_y). [m/s]
- **Messung: z = (i_x,i_y) [Pixel] Position der Kugel im Kamerabild.**

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = f\left(p_x, p_y, v_x, v_y\right) = p_{center} + \frac{f_{eff}}{Z}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Initialisierung

<u>Frage an das Auditorium</u>: Wie initialisiert man den Partikelfilter für das Billard Problem?

- **Zustand: $x = (p_x, p_y, v_x, v_y)$**
  - Position [m] (p_x, p_y),
  - Geschwindigkeit (v_x, v_y). [m/s]
- **Messung: $z = (i_x, i_y)$ [Pixel] Position der Kugel im Kamerabild.**
- **2 Messungen definieren den Zustand:**
  - 2. Messung definiert die Position (p_x, p_y)
  - 1.&2. definieren Geschwindigkeit (v_x, v_y)
- **Vorgehen:**
  - ersten zwei Messungen speichern
  - Rauschen addieren
  - Zustand berechnen (siehe rechts)
  - nicht gewichten!
  - danach wie gewohnt weiter

$$p_x = \frac{Z}{f}\left(i_{x2} - p_{centerx}\right)$$

$$p_y = \frac{Z}{f}\left(i_{y2} - p_{centery}\right)$$

$$v_x = \frac{1}{\Delta t}\left(p_x - \frac{Z}{f}\left(i_{x1} - p_{centerx}\right)\right)$$

$$v_y = \frac{1}{\Delta t}\left(p_y - \frac{Z}{f}\left(i_{y1} - p_{centery}\right)\right)$$

Resampling

Quelle einiger der folgenden Folien (modifiziert) mit freundlicher Genehmigung von
Wolfram Burgard, Introduction to Mobile Robotics, Lecture 9, Universität Freiburg, 2005
http://ais.informatik.uni-freiburg.de/lehre/ss05/robotics/

Resampling

<u>Aufgabenstellung</u>

- **gegeben: S={(xi,wi)|i=1..n} Partikel xi mit Gewicht w_i.**
- **gesucht : n zufällige Stichproben, wobei die Wahrscheinlichkeit x_i zu ziehen proportional w_i ist.**
- **naïve, aber nicht gute Lösung: n mal unabhängig zufällig aus der Partikelmenge ziehen mit einer Wahrscheinlichkeit die den Gewichten entspricht.**

Resampling

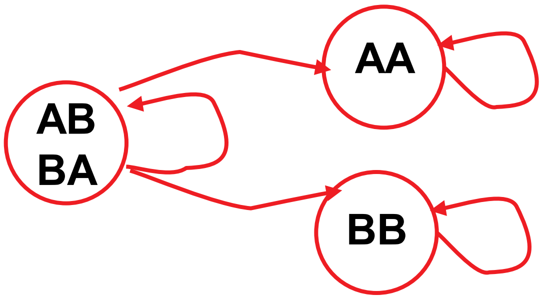
Naïve Lösung

- **n mal unabhängig zufällig aus der Partikelmenge ziehen**
- **Frage an das Auditorium: Wo liegt das Problem?**
  - zwei Zustände A, B
  - zwei Partikel (w_1=w_2)
  - 1000 mal resampling
  - was passiert?

Resampling

Naïve Lösung

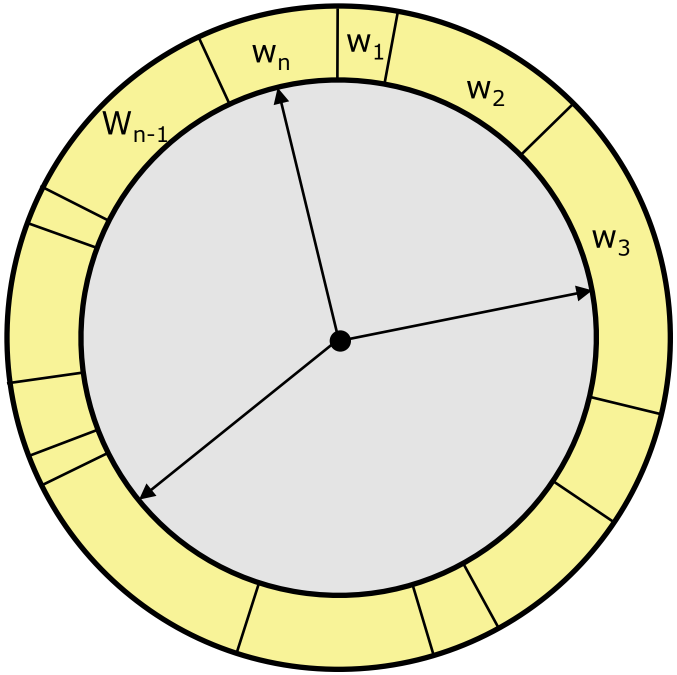
- **n mal unabhängig zufällig aus der Partikelmenge ziehen**
- **Frage an das Auditorium: Wo liegt das Problem?**
  - zwei Zustände A, B
  - zwei Partikel (w_1=w_2)
  - 1000 mal resampling
  - was passiert?
- **einer der Zustände geht verloren**
- **sehr wahrscheinlich (50% je Resampling)**
- **Partikelfilter glaubt danach fälschlicherweise, er kenne den Zustand**



Resampling

Naïve Lösung

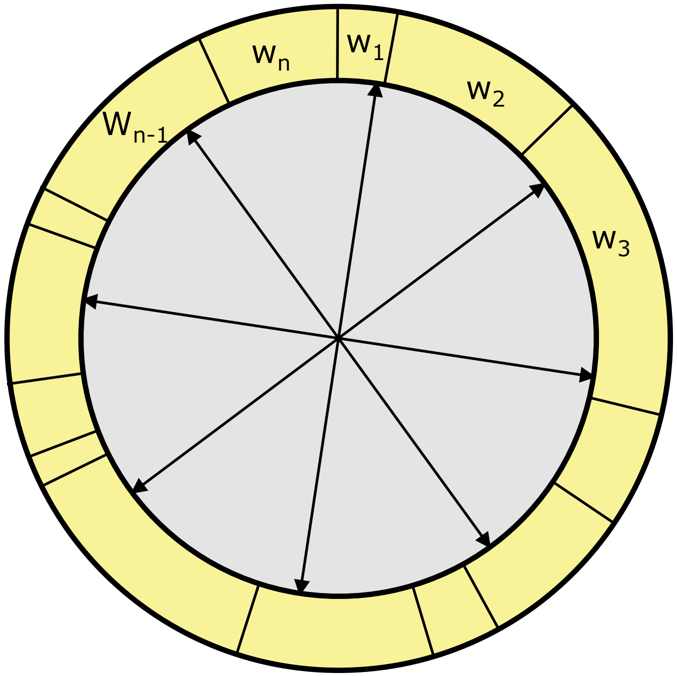
- **unabhängiges Resampling**
  - wie Glücksrad
  - mit Feldgrößen entsprechend Partikelgewicht w_i
  - n-mal drehen



Resampling

Systematisches Resampling

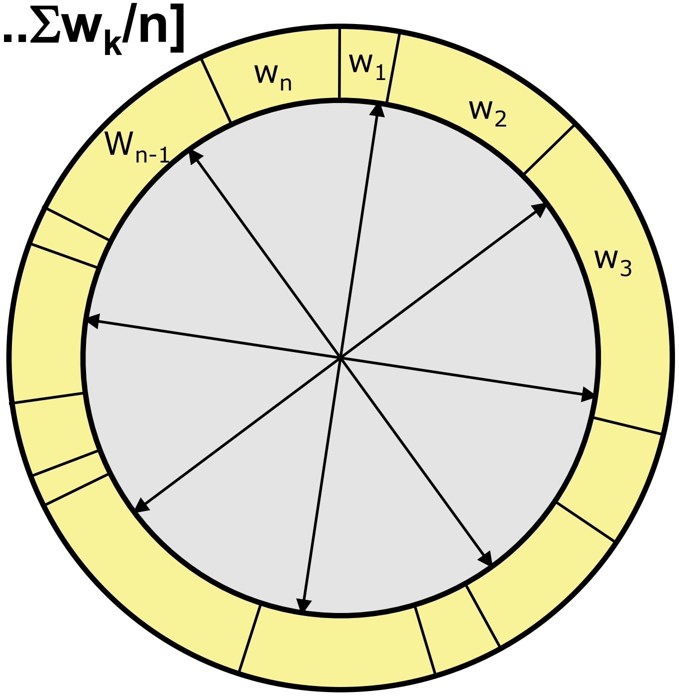
- **unabhängiges Resampling**
  - wie Glücksrad
  - mit Feldgrößen entsprechend Partikelgewicht w_i
  - n-mal drehen
- **systematisches Resampling**
  - einmal Drehen mit n Zeigern



Resampling

Systematisches Resampling (Algorithmus)

- **Winkel des Glücksrades darstellen als Zahl $0..\Sigma w_k$.**
- **Glückradszeiger im Abstand $\Sigma w_k/n$**
- **erster Glücksradzeiger ist Zufallszahl $\alpha_0 \in [0..\Sigma w_k/n]$**
- **nächsten Zeiger als $\alpha_i = \alpha_0 + i\ \Sigma w_k/n$**
- **Partikel (Feld) j(i) zu Zeiger α_i bestimmen**
  - erstes mit Gewichtssumme $>\alpha_i$
  - $j(i) = \min \{j \mid \alpha_i < \Sigma_{k=0..j} w_k\}$
- **wiederholen für i=0..n-1**



Resampling

```
resample (vector<Particle>& p) { // Systematic Resampling
    totalWeight=0;
    for (int i=0; i<p.size(); i++) totalWeight += p[i].weight;
    vector<Particle> pNew; weightUpToJ = 0; j = -1;
    weightChosen = draw from [0..totalWeight/p.size());// „1. Glücksradzeiger“
    for (int i=0; i<p.size(); i++) { // Für jeden neuen Partikel i
        while (weightChosen>=weightUpToJ) {
            j++;
            weightUpToJ += p[j].weight;
        }
        pNew.push_back (p[j]); // Der ist es jeden neuen Partikel j
        pNew.back().weight = 1.0/p.size();
        weightChosen += totalWeight/p.size(); // „Nächster Glücksradzeiger“
    }
    p = pNew;
}
```

Herleitung Partikelfilter

Herleitung Partikelfilter

- **Bayes Formel:**

$$p(X=x|Y=y)p(Y=y)=p(X=x,Y=y)=p(Y=y|X=x)p(X=x)$$

$$p(X=x|Y=y)=\frac{p(Y=y|X=x)p(X=x)}{p(Y=y)}\overset{y\,\text{fest}}{\propto}p(Y=y|X=x)p(X=x)$$

- **Bayes mit Vorbedingung z:**

$$p(X=x|Y=y,Z=z)=\frac{p(Y=y|X=x,Z=z)p(X=x|Z=z)}{p(Y=y|Z=z)}$$

$$\overset{y\,\text{fest}}{\propto}p(Y=y|X=x,Z=z)p(X=x|Z=z)$$

Herleitung Partikelfilter

- **Gesetz der Gesamtwahrscheinlichkeit**

$$\int p(Z = z)dz = 1,$$

$$p(X = x) = \int p(X = x, Z = z)dz = \int p(X = x | Z = z)p(Z = z)dz$$

$$p(X = x | Y = y) = \int p(X = x | Y = y, Z = z)p(Z = z | Y = y)dz$$

Herleitung Partikelfilter

Bayes Filter

- **Notation:**
  - Grossbuchstaben Unbekannte, Kleinbuchstaben bekannt
  - Zustand zur Zeit t: X_t
  - Messung zur Zeit t: $Z_t=z_t$
  - Dynamikmessung t->t+1: $U_t=u_t$
- **repräsentiert und aktualisiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung des aktuellen Zustandes gegeben alle bisherigen Messungen.**

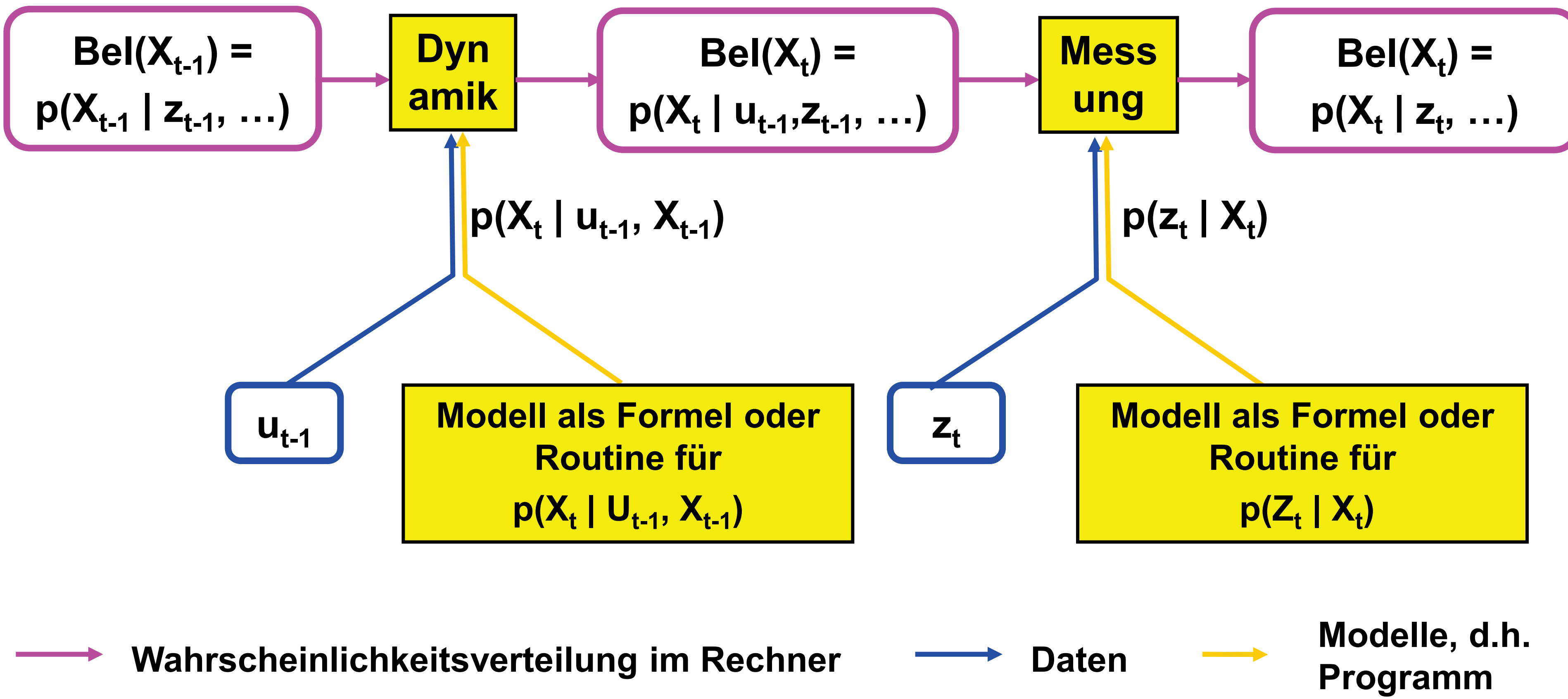
  $$p(X_t=x_t | Z_t=z_t, U_{t-1}=u_{t-1}, Z_{t-1}=z_{t-1}, \ldots, Z_1=z_1, U_0=u_0, Z_0=z_0)$$
- **Verteilung heißt Belief, weil sie im System gespeichert das repräsentiert was das System über die Umwelt glaubt.**
- **Markov Annahme:**
  - (1) Messung beruht nur auf Zustand: $p(Z_t=z_t \mid X_t=x_t, \ldots) = p(Z_t=z_t \mid X_t=x_t)$
  - (2) Zustand beruht nur auf Dynamikmessung und Vorgänger: $p(X_t=x_t \mid U_{t-1}=u_{t-1}, X_{t-1}=x_{t-1}, \ldots) = p(X_t=x_t \mid U_{t-1}=u_{t-1}, X_{t-1}=x_{t-1})$

Herleitung Partikelfilter

- **abgekürzte Notation p(x) = p(X=x), p(x|z) = p(X=x|Z=z), etc.**
  - jeweils Wahrscheinlichkeits(-dichte) eines konkreten Wertes x, z, ..
  - als Wahrscheinlichkeits(-dichte) dass dazugehörige Zufallsvariable diesen Wert hat.

Herleitung Partikelfilter

<u>Bayes Filter: *Abstrakter Rahmen* für Partikel (u.a. Kalman) Filter</u>



Herleitung Partikelfilter

Bayes Filter

$$p\left(x_t \middle| z_t, u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right)$$

Bayes

$$= \frac{p\left(z_t \middle| x_t, u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right) p\left(x_t \middle| u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right)}{p\left(z_t \middle| u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right)}$$

z_t konstant

$$\propto p\left(z_t \middle| x_t, u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right) p\left(x_t \middle| u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right)$$

Markov (1)

$$= p\left(z_t \middle| x_t\right) p\left(x_t \middle| u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right)$$

Gesamtwahr-scheinlichkeit

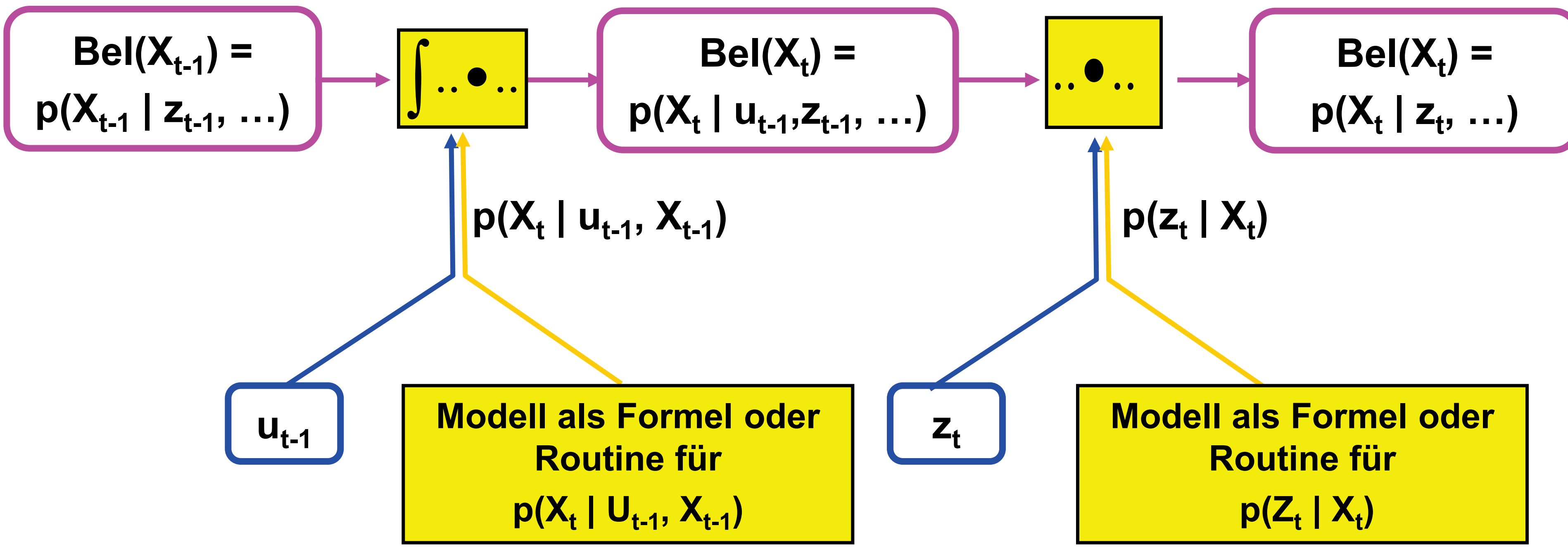
$$= p\left(z_t \middle| x_t\right) \int p\left(x_t \mid x_{t-1}, u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right) p\left(x_{t-1} \middle| u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\right) dx_{t-1}$$

Markov (2)

$$= p\left(z_t \middle| x_t\right) \int p\left(x_t \mid u_{t-1}, x_{t-1}\right) p\left(x_{t-1} \middle| z_{t-1}, \ldots\right) dx_{t-1}$$

Herleitung Partikelfilter

Bayes Filter: *Abstrakter Rahmen* für Particle (u.a. Kalman) Filter



Wahrscheinlichkeitsverteilung im Rechner

Daten

Modelle, d.h. Programm

Herleitung Partikelfilter

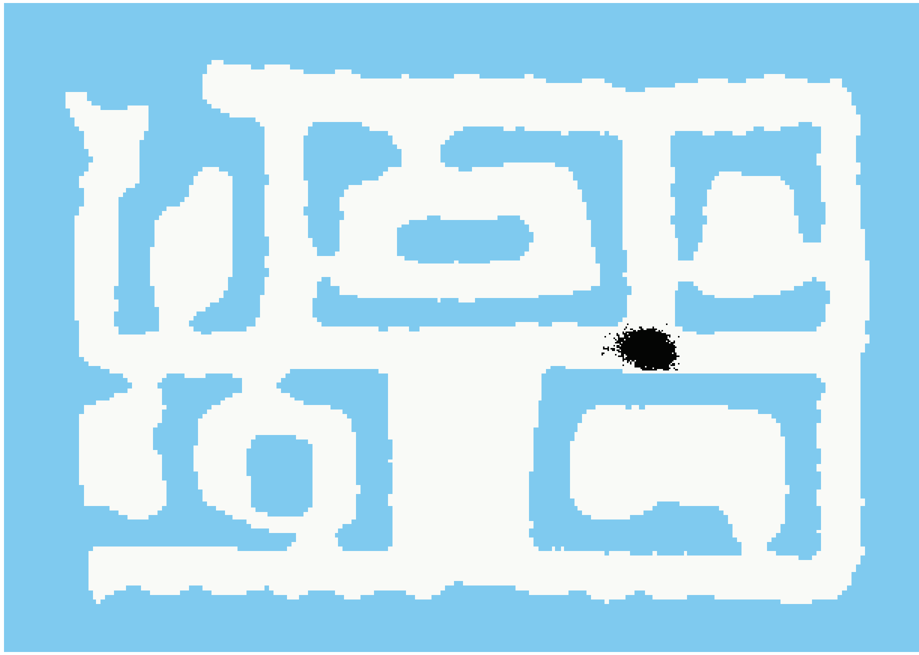
<u>Warum „Partikel“?</u>

- **Verschiedene Bayes Filter unterscheiden sich in der Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $Bel(X_t) = p(X_t \mid z_t, u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots, z_1, u_0, z_0)$**
  - Partikel Filter: *gewichteter* Menge von *Stichproben* (Particles, Samples)
  - Kalman Filter: Mittelwert, Kovarianz (siehe Theorie der Sensorfusion)
  - Hidden Markov Models: Tabellierte diskrete Verteilung
  - Dynamische Bayes Netzwerke
- **Idee beim Partikel Filter:**
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung durch *gewichtete* Menge von *Stichproben* (Particles, Samples) darstellen.
  - Einsatz von Zufallszahlen beim Ziehen der Stichproben (Monte Carlo Methode)
- **Notation nimmt an, dass Messungen und Zustandsübergänge abwechselnd erfolgen. Das ist aber nicht nötig.**

Herleitung Partikelfilter

Was heißt aus $p(X_t \mid z_t, u_{t-1}, z_{t-1}, \ldots, z_1, u_0, z_0)$ ziehen?

- **größter Teil von X_t hat sehr kleine Wahrscheinlichkeit.**
  - daher finden, wo $p(X_t|..)$ groß ist.
- **nicht wie ein Zufallszahlen-generator.**
- **wie Funktionsmaximierung mit zusätzlichem Zufall**
- **verwandte Operationen:**
  - Funktionsmaximierung
  - Gleichung lösen
  - aus Verteilung ziehen

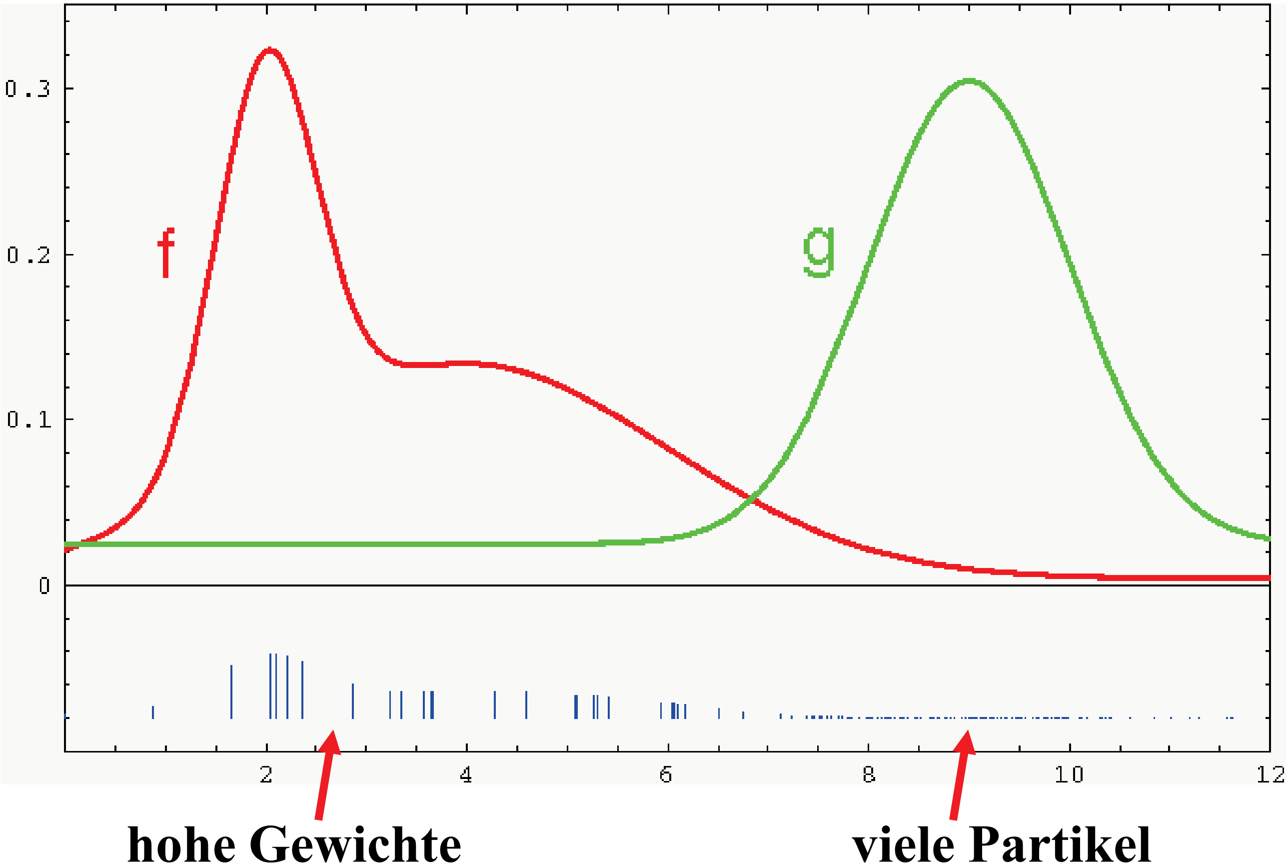


Herleitung Partikelfilter

Bedeutung der Gewichte

- **Partikel „zählt“ proportional zu seinem Gewicht.**
- **hohe Wahrscheinlichkeit dargestellt durch**
  - viele Partikel mit niedrigem Gewicht
  - wenige Partikel mit hohem Gewicht
- **Gewicht ermöglicht „importance sampling“**
  - aus einer ähnlichen aber einfacheren Verteilung ziehen.
  - Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten ins Gewicht ziehen
  - wenn nötig danach resamplen
  - $\Rightarrow$entweder ziehen oder gewichten
- **Partikelfilter realisiert „importance sampling“**
  - Dynamik ziehen
  - Messung gewichten
  - Dynamik * Messung repräsentiert

Herleitung Partikelfilter



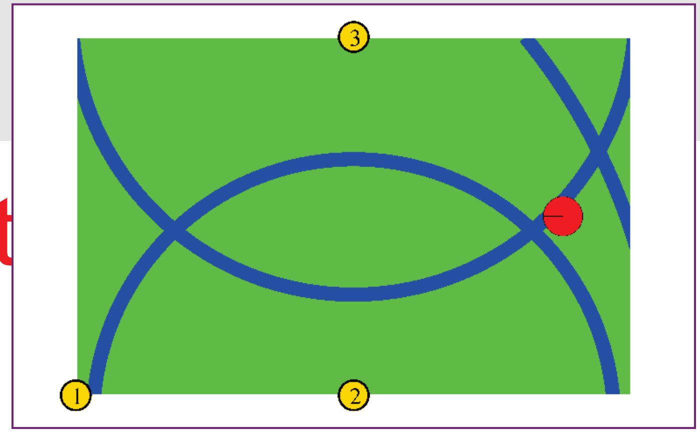
Importance Sampling

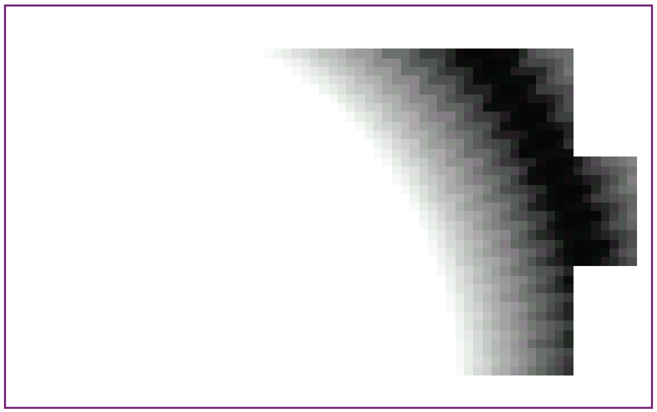
- aus einer anderen Verteilung ziehen, als man repräsen-tieren will.
- ziehen nach g
- Gewicht $w = f / g$
- repräsentiert $g\, f/g = f$
- praktisch, wenn f schwieriger als g ist, aber beide ähnlich.

Herleitung Partikelfilter

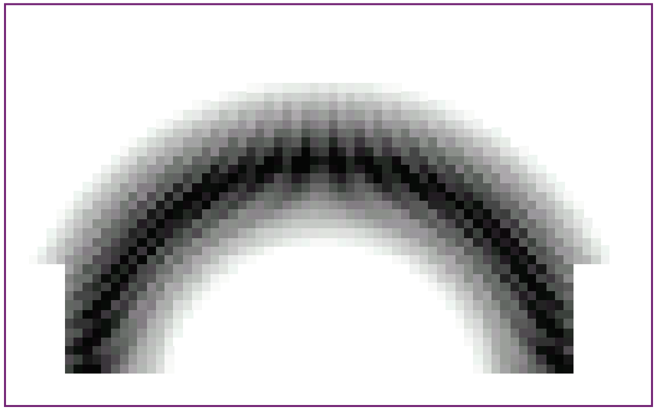
<u>Importance Sampling Beispiel</u>:
Lokalisation auf einem RoboCup Feld per Bildverarbeitung
Zu farbigen Eck- / Mittellandmarken wird die Entfernung bestimmt.

Herleitung Part

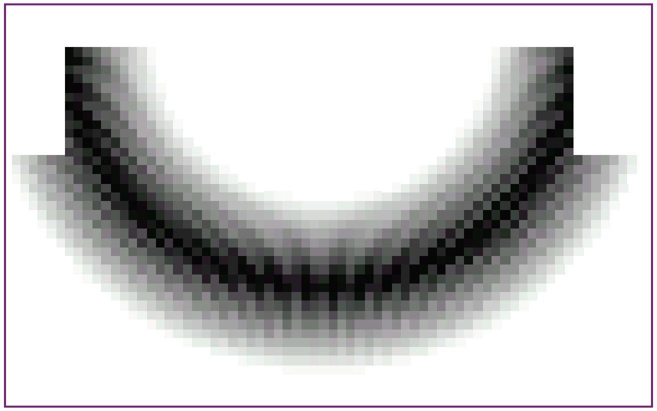




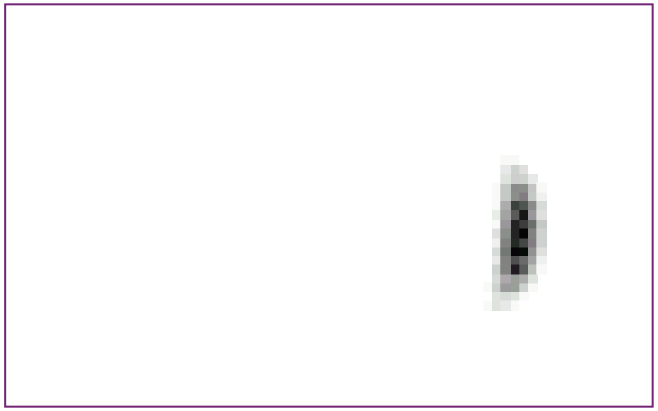
$p(x|z_1)$



$p(x|z_2)$

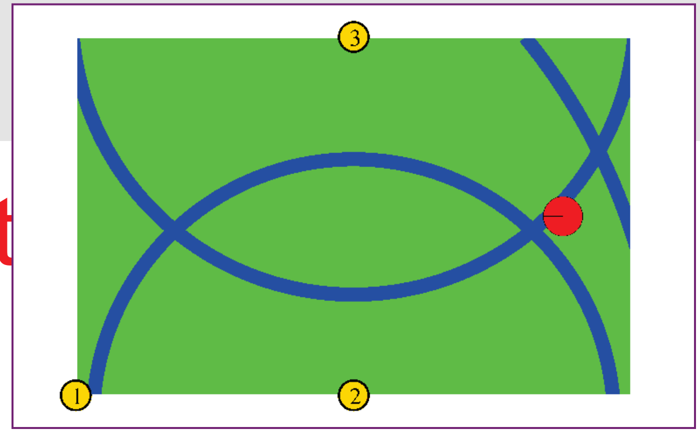


$p(x|z_3)$

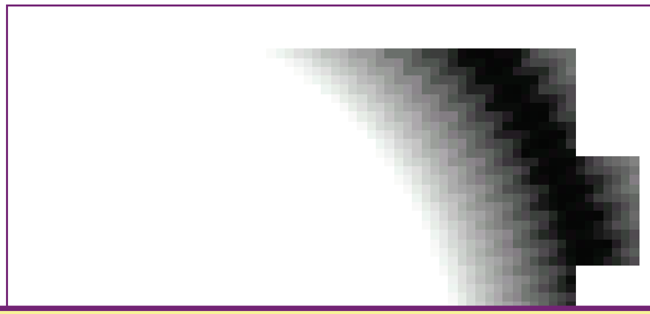


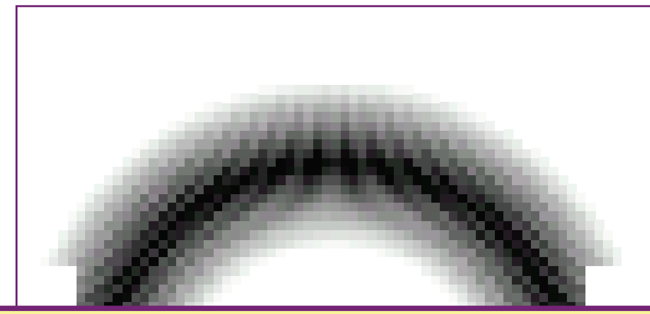
$p(x|$
$z_1,z_2,z_3)$

Herleitung Part



$p(x|z_1)$

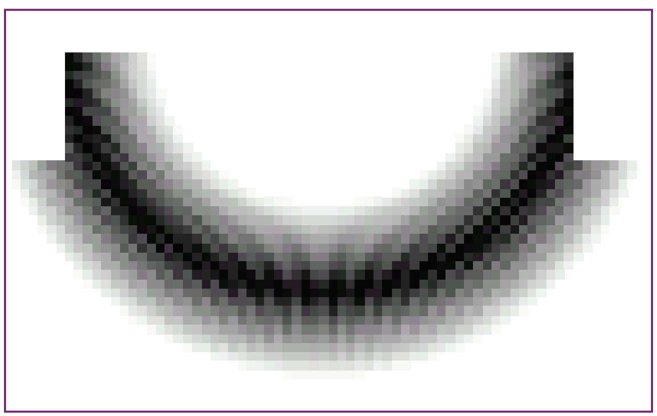




$p(x|z_2)$

Gesucht: Stichproben aus $P(X|\ z_1, z_2, z_3)$

$p(x|z_3)$



$p(x|\ z_1,z_2,z_3)$

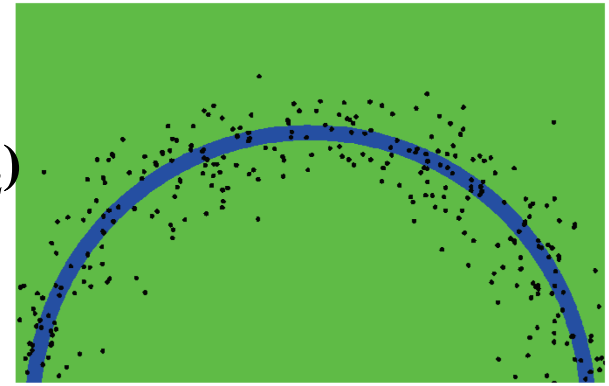
Herleitung Partikelfilter

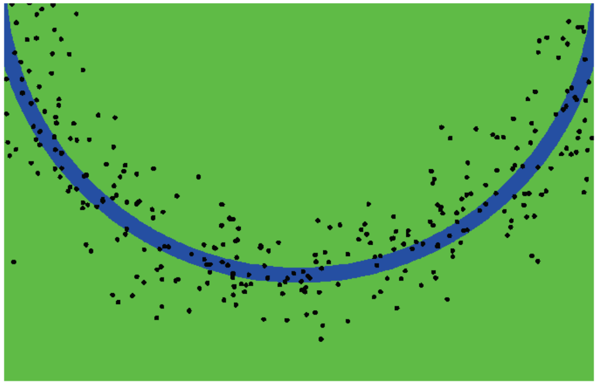
Importance Sampling Beispiel:

- **ziehen aus $P(X \mid z_i)$:**
  - Rauschen auf z_i addieren
  - Winkel würfeln.

$p(x|z_1)$

$p(x|z_2)$





$p(x|z_3)$

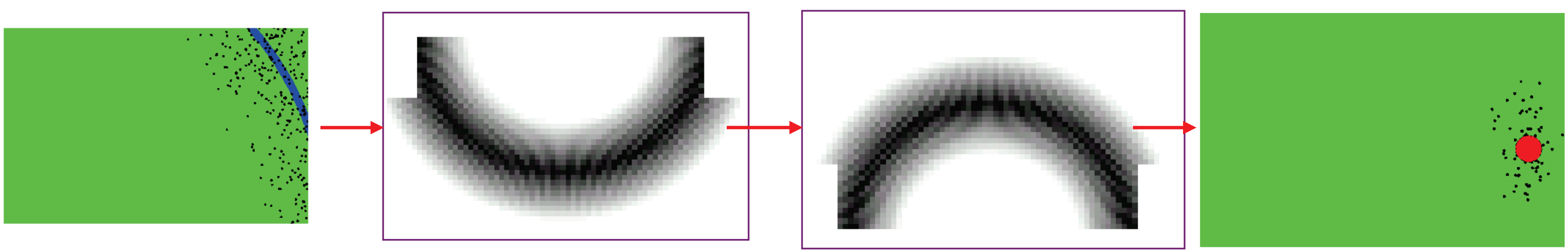
Herleitung Partikelfilter

<u>Importance Sampling Beispiel:</u>

- ziehen aus $p(x|z_1)$
- gewichten nach $p(z_2|x)$
- gewichten nach $p(z_3|x)$
- resampling

Entweder ziehen oder gewichten, nicht beides.

ziehen aus $p(x|z_1)$ | gewichten $p(z_2|x)$ | gewichten $p(z_3|x)$ | resampling



Herleitung Partikelfilter

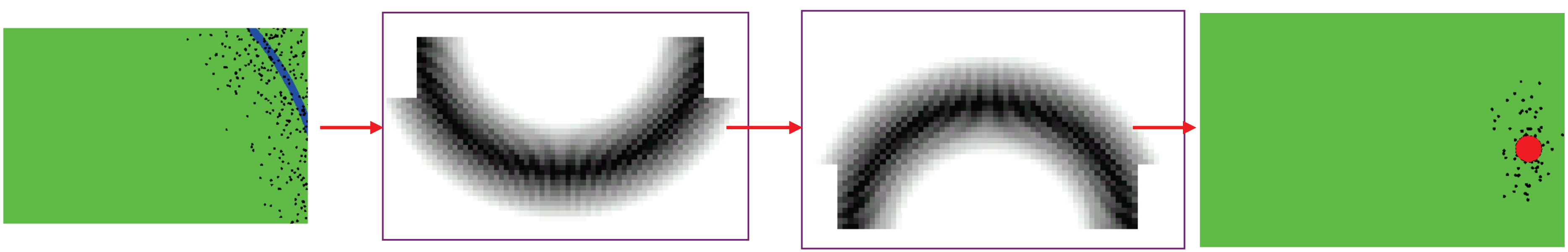
Importance Sampling Beispiel:

- ziehen aus $p(x|z_1)$
- gewichten nach $p(z_2|x)$
- gewichten nach $p(z_3|x)$
- resampling

Frage an das Auditorium:

Welche Vorgehensweise wäre noch besser?

ziehen aus $p(x|z_1)$ | **gewichten $p(z_2|x)$** | **gewichten $p(z_3|x)$** | **resampling**



Herleitung Partikelfilter

Importance Sampling Beispiel:

- ziehen aus $p(x|z_1)$
- gewichten nach $p(z_2|x)$
- gewichten nach $p(z_3|x)$
- resampling

Frage an das Auditorium:

Welche Vorgehensweise wäre noch besser?

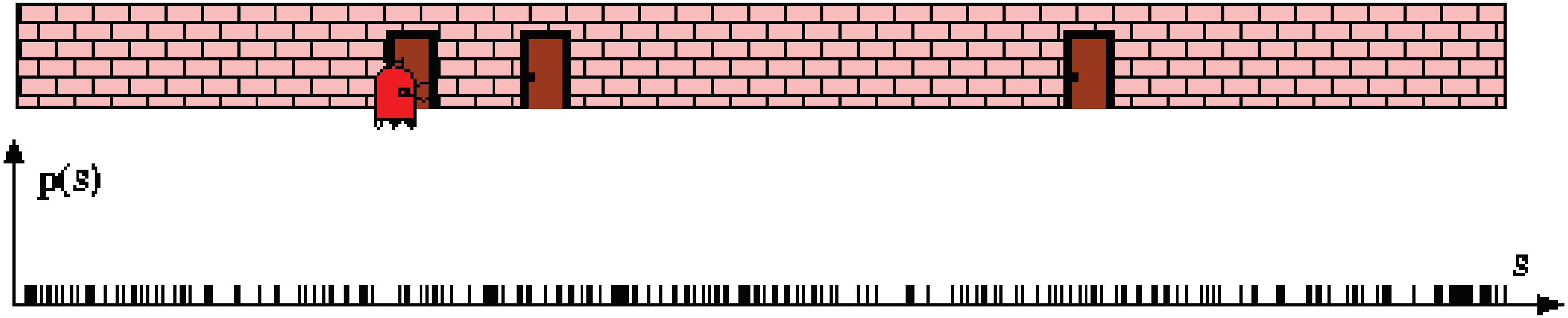
- ziehen aus $p(x|z_1,z_2)$
- durch verrauschen und Kreise schneiden
- gewichten nach $p(z_3|x)$
- resampling

Herleitung Partikelfilter

<u>Beispiel für vollen Particle Filter (aus Importance-Sampling Sicht)</u>:
Lokalisation eines Roboters mit Odometrie und "Türsensor".
Quelle: Thrun et al., Probabilistic Robotics

Anfangsverteilung über den Zustand x_0

$Bel(x_0) = P(x_0)$

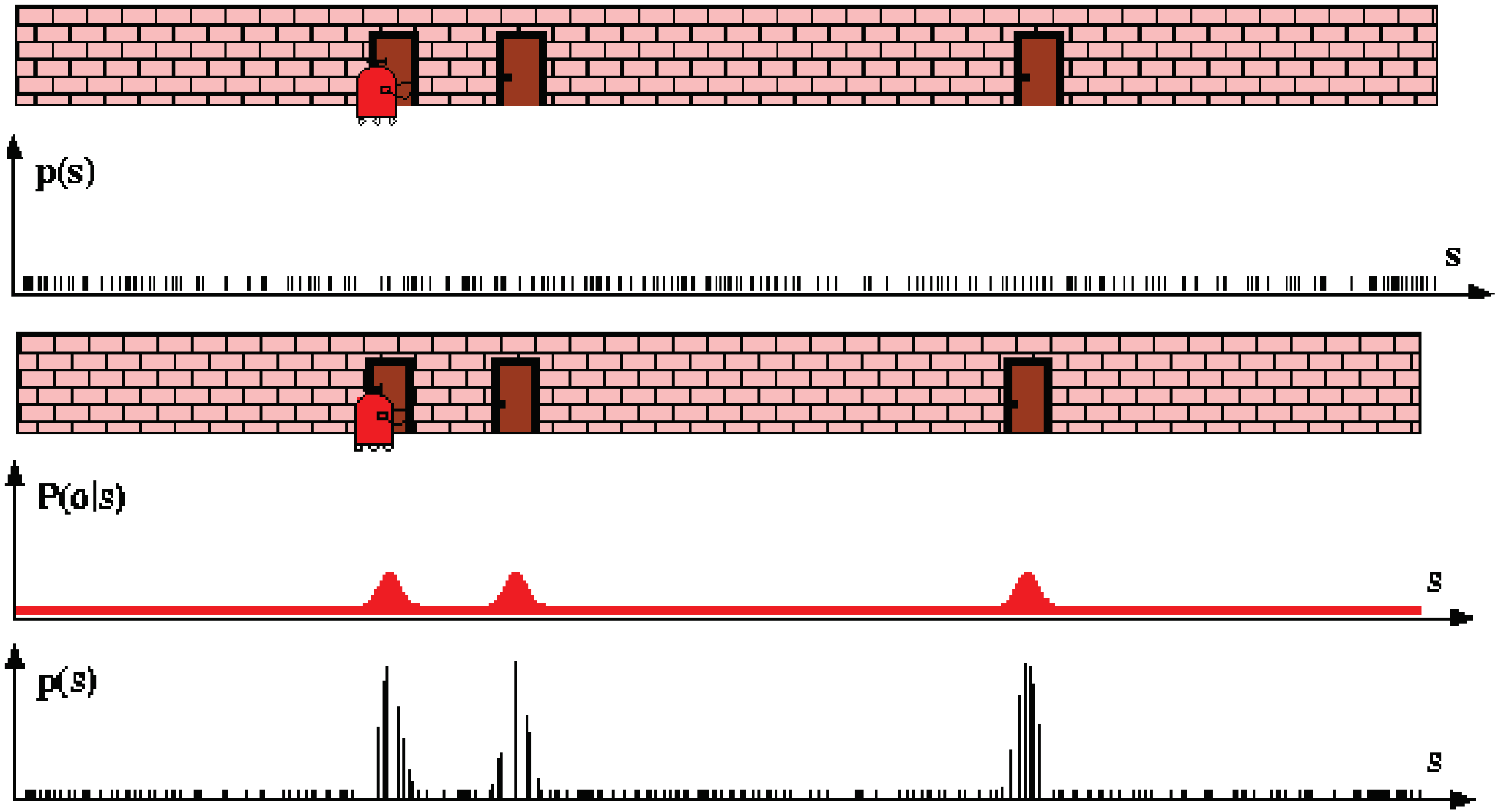


Messung z_0

$$Bel(x_0) \leftarrow \alpha\ p(z \mid x_0)\ Bel(x_0)$$

$$w \leftarrow \frac{\alpha\ p(z \mid x_0)\ Bel(x_0)}{Bel(x_0)} = \alpha\ p(z \mid x_0)$$

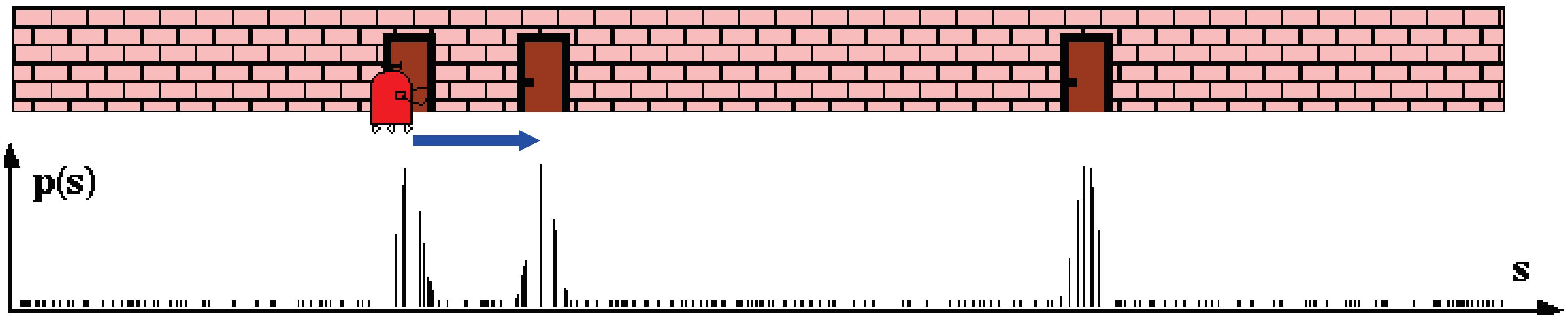
Multipliziere Gewicht mit $p(z|x_0)$

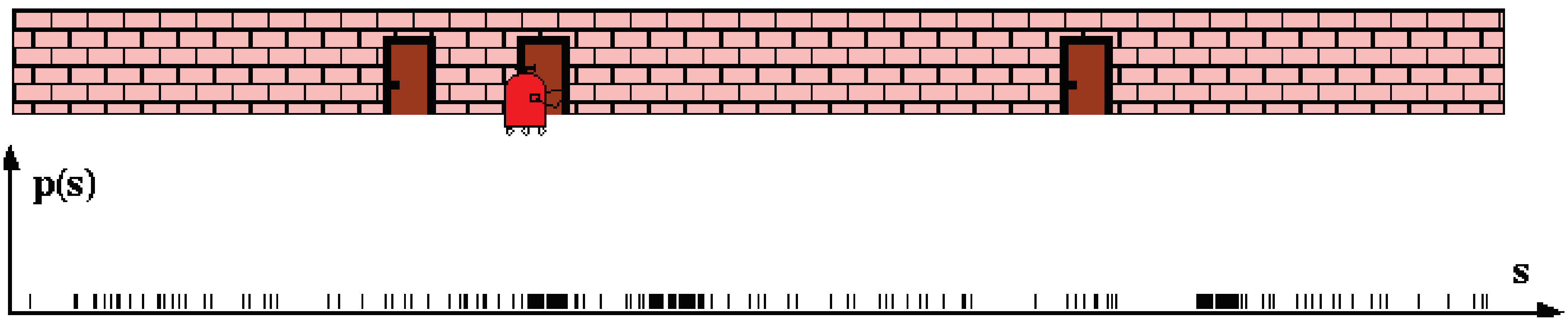


Dynamik u_0 von x_0 nach x_1

$$\boxed{Bel(x_1) \;\leftarrow\; \int p(x_1 \mid u_0, x_0)\, Bel(x_0)\; \mathrm{d}\,x_0}$$

Ziehe aus Partikeln gemäß Gewicht. Ziehe dann x_t aus $p(X_1|x_0,u_0)$ Integration implizit durch weglassen von x_0



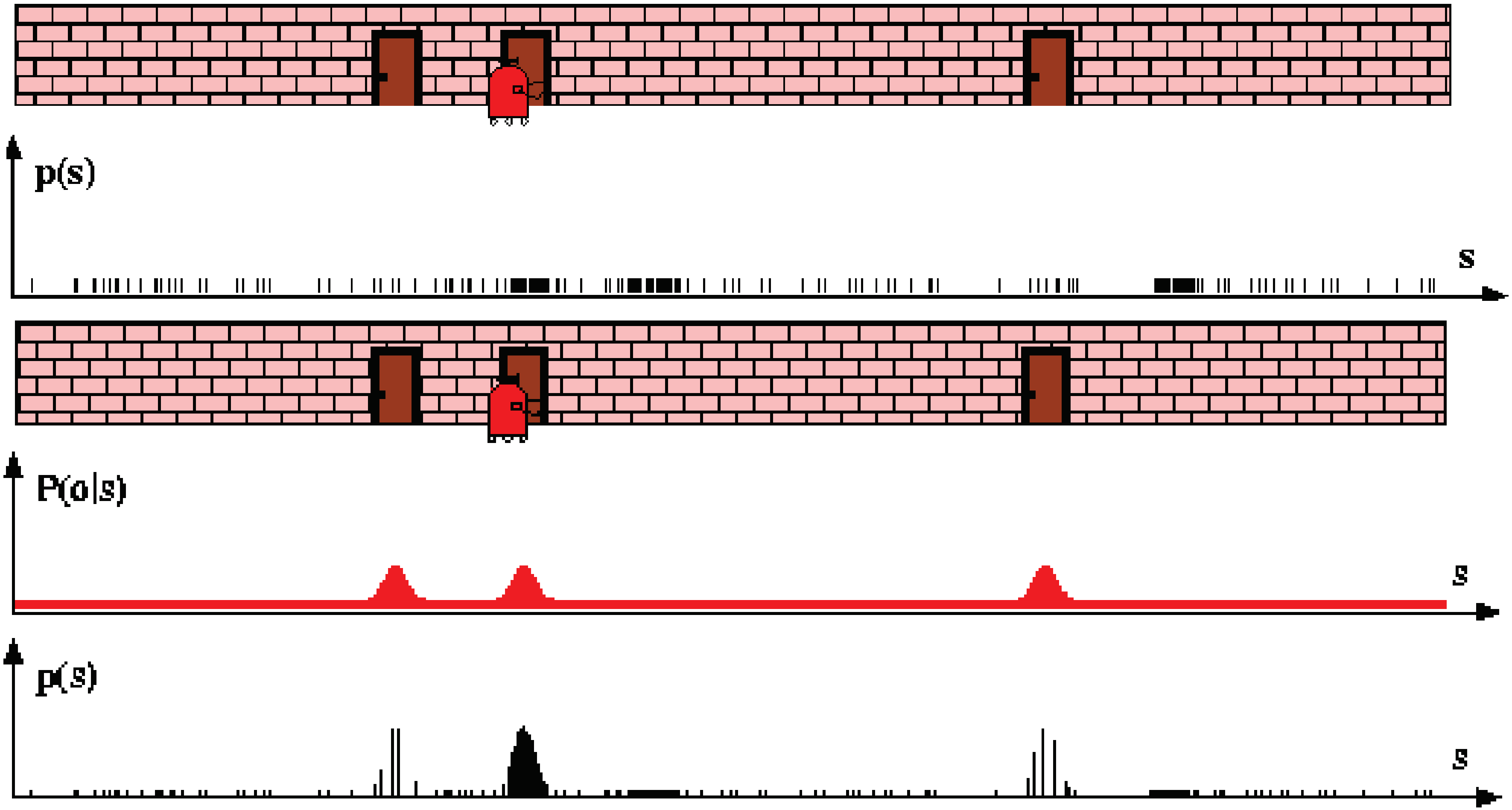


Messung z_1

$$Bel(x_1) \leftarrow \alpha\ p(z \mid x_1)\ Bel(x_1)$$

$$w \leftarrow \frac{\alpha\ p(z \mid x_1)\ Bel(x_1)}{Bel(x_1)} = \alpha\ p(z \mid x_1)$$

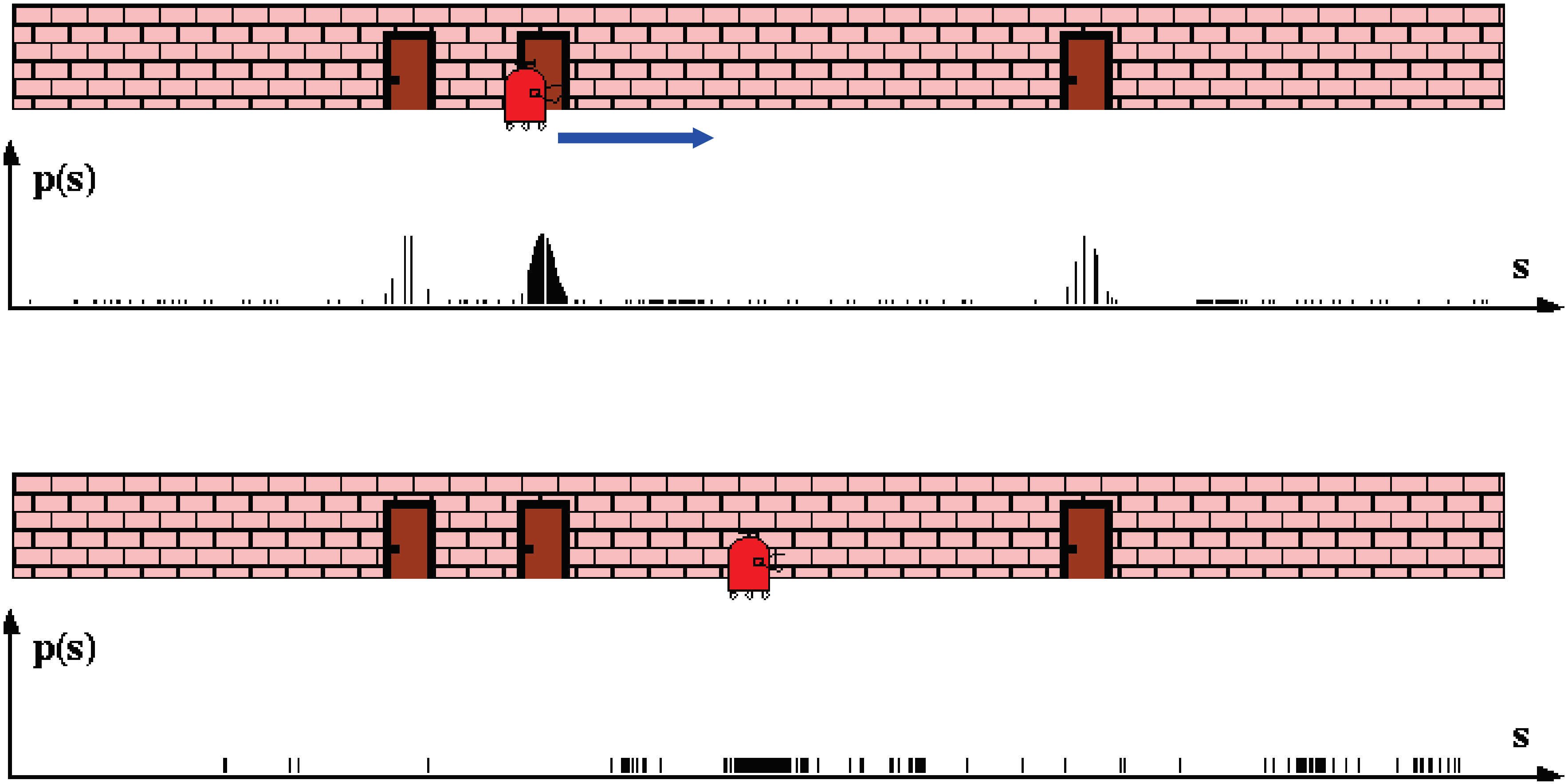
Multipliziere Gewicht mit $p(z|x_1)$



Dynamik u_1 von x_1 nach x_2

$$Bel(x_2) \quad \leftarrow \quad \int p(x_2 \mid u_1, x_1)\, Bel(x_1) \; \mathrm{d}\, x_1$$

Ziehe aus Partikeln gemäß Gewicht. Ziehe dann x_t aus $p(X_2|x_1,u_1)$ Integration implizit durch weglassen von x_1



Herleitung Partikelfilter

Partikelfilter aus Importance-Sampling Sicht

$$Bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t) \int p(x_t \mid x_{t-1}, u_{t-1})\, Bel(x_{t-1})\, dx_{t-1}$$

Gewicht-summe=1

Gewicht

Ziehen

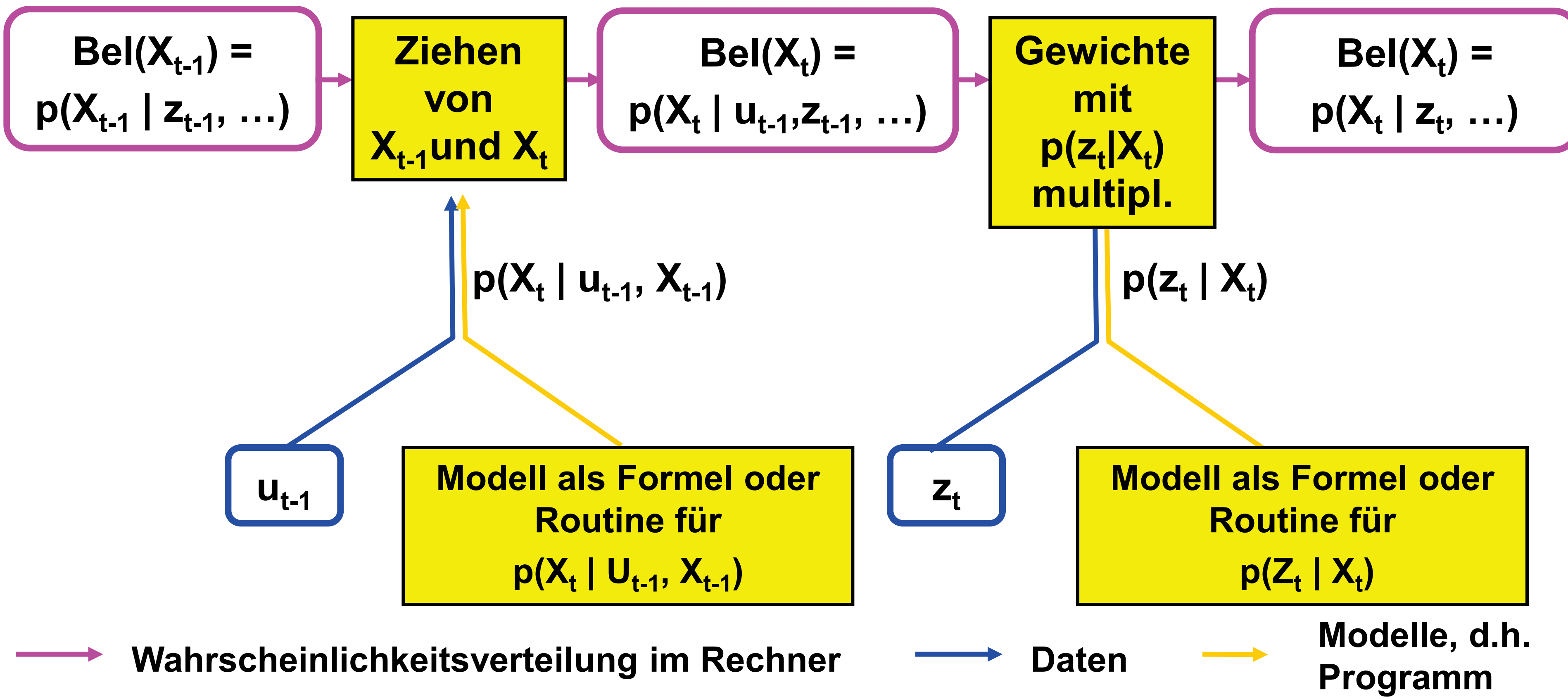
ziehe x^i_{t-1} aus $Bel(x_{t-1})$

ziehe x^i_t aus $p(x_t \mid x^i_{t-1}, u_{t-1})$

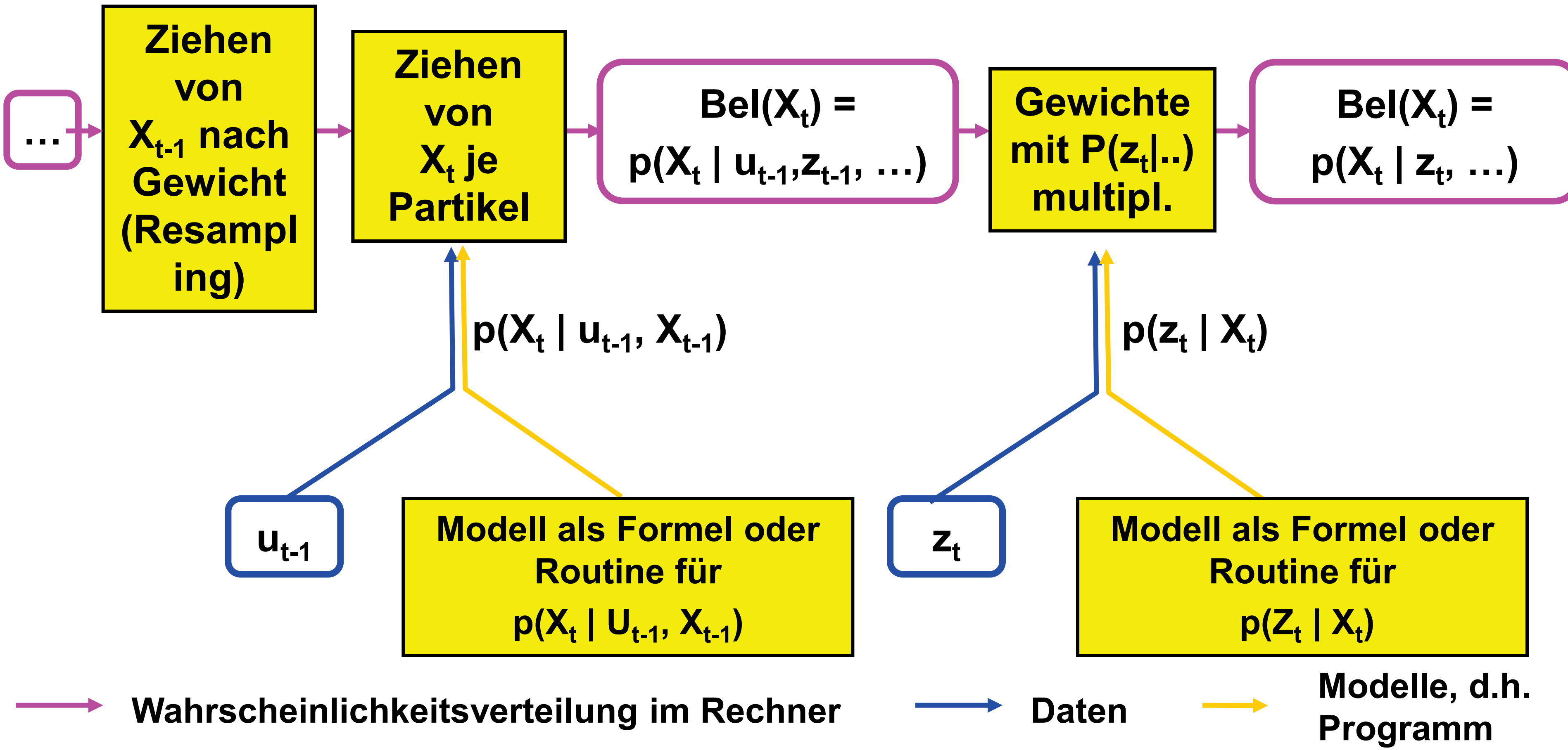
Gewicht für x^i_t:

$$w^i_t = \frac{\text{Ziel Verteilung}}{\text{gezogene Verteilung}} = \frac{\eta\, p(z_t \mid x_t)\, p(x_t \mid x_{t-1}, u_{t-1})\, Bel(x_{t-1})}{p(x_t \mid x_{t-1}, u_{t-1})\, Bel(x_{t-1})} \propto p(z_t \mid x_t)$$

Herleitung Partikelfilter



Herleitung Partikelfilter



Zusammenfassung

- **Partikel Filter sind Bayesfilter**
- **repräsentieren a-posteriori Verteilung durch gewichtete Stichproben**
- **Dynamik: ziehen aus Zustandsübergangsverteilung**
  - praktisch: ideale Bewegung + gezogenes Rauschen
- **Messung: gewichten**
  - praktisch oft: Differenz zu idealer Messung in Fehlerverteilung
- **re-sampling: ziehen aus Partikeln mit Wahrscheinlichkeit proportional zu Gewicht**
  - systematisch, nicht unabhängig ziehen
- **initialisieren auf Grund der ersten (paar) Messungen**
- **jede Unsicherheit *einmal* einbringen, d.h. *entweder* zufällig ziehen oder gewichten.**