

Echtzeitbildverarbeitung (3)

Prof. Dr. Udo Frese

Histogramm

Automatischer Schwellwert

Charakteristische Größen

Schwerpunkt und Hauptträgheitsachsen

Was bisher geschah

- ▶ **Weg des Bildes in den Rechner wird durch viele Faktoren beeinflusst**
 - ▶ Optik der Szene: Beleuchtung, Verdeckung, Schatten, Reflexionen
 - ▶ Objektiv: Öffnungswinkel, Blende, Belichtung
 - ▶ Beleuchtung, Blende und Belichtung gut wählen, keine Über- / Unterbelichtung
 - ▶ CCD Chip, Datenübertragung: Beschränkt Auflösung / Bildrate
- ▶ **„Industrieller Standardansatz“**
 - ▶ Aufnahme vor Durchlichtkasten, Segmentierung über Schwellwert
 - ▶ Darstellen als Vereinigung von Intervallen (run length encoding)
 - ▶ Regionenbildung über Union-Find-Algorithmus
 - ▶ Merkmale und Applikationsabhängige Bewertung der Merkmale
- ▶ **Union-Find-Algorithmus (fast $O(\text{Intervallzahl})$)**
 - ▶ Zwei Zeiger laufen durch die Intervalle im Abstand einer Zeile
 - ▶ Regionen sich berührender Intervalle werden vereinigt
 - ▶ Region dargestellt durch zur Wurzel gerichteten Baum

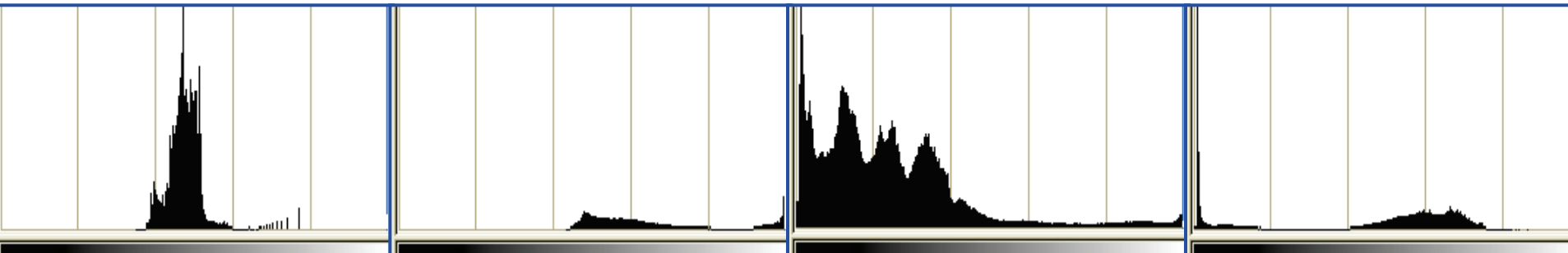
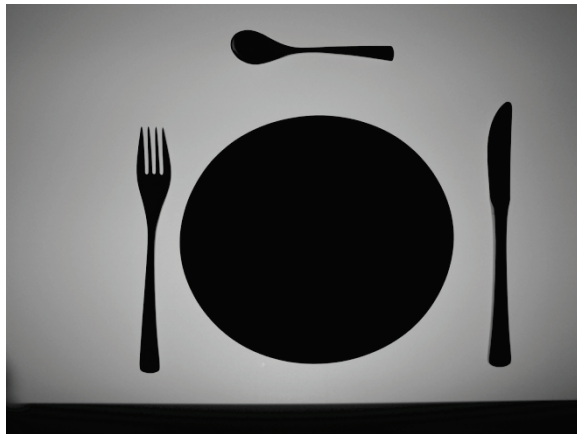
Histogramm

Histogramm

- ▶ **Verteilung der Grauwerte im Bild: Histogramm h**
- ▶ **$h[i]$ ist Anzahl der Pixel die Grauwert i haben.**
- ▶ **Normalisiert (Summe 1) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung:**
 - ▶ Verteilung des Grauwertes eines zufälligen Pixels
- ▶ **Berechnung durch Zählen**
- ▶ **Optimierung: Zählen nur eines Teils der Pixel (z.B. jede zweite Zeile)**
- ▶ **Bei einem gut belichteten Bild sollte das Histogramm den ganzen Wertebereich abdecken**

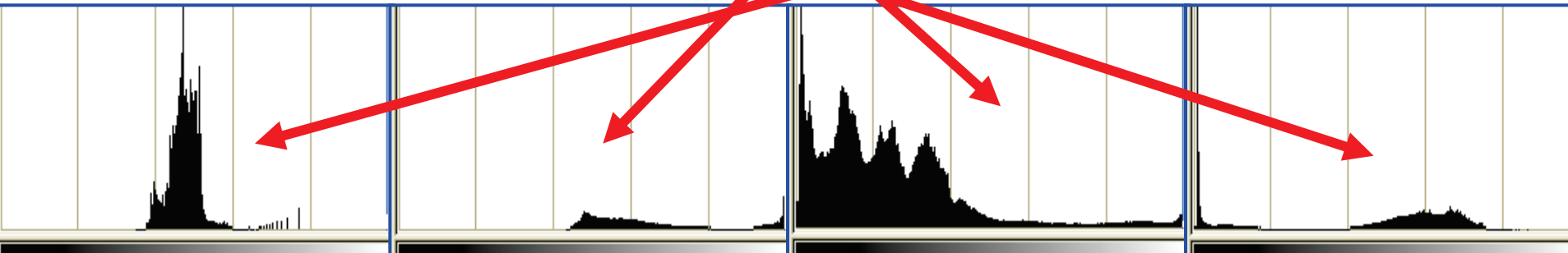
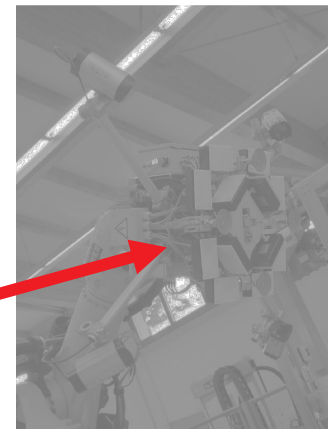
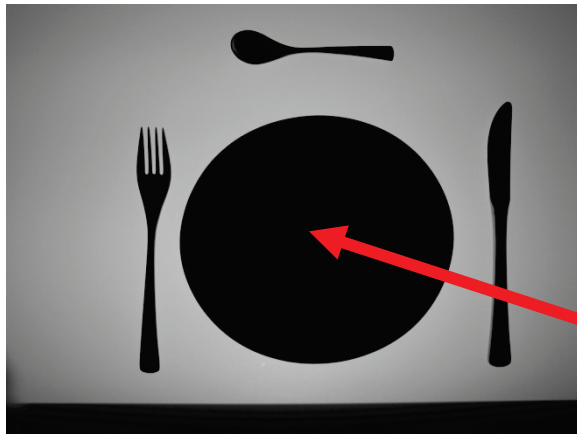
Histogramm

- ▶ Frage an das Auditorium: Welches Histogramm gehört zu welchem Bild? Was kann man vom Histogramm über das Bild sagen?



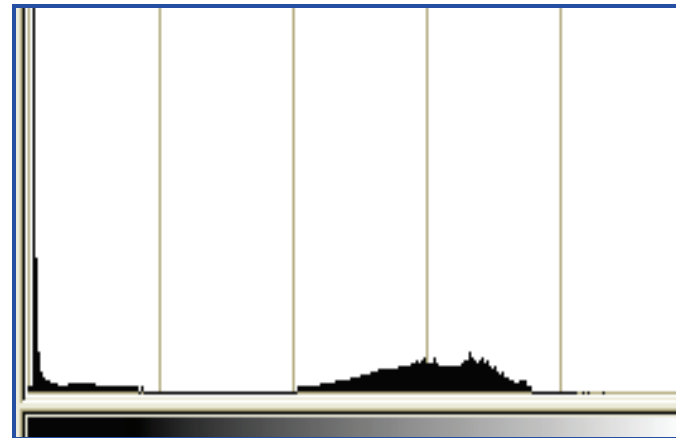
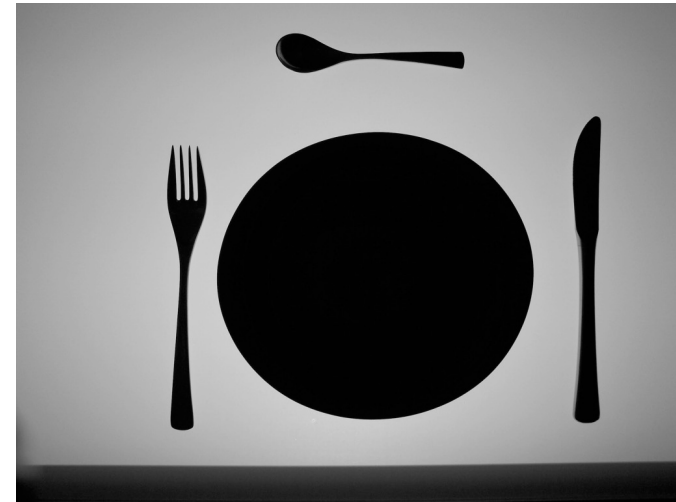
Histogramm

- ▶ Frage an das Auditorium: Welches Histogramm gehört zu welchem Bild? Was kann man vom Histogramm über das Bild sagen?



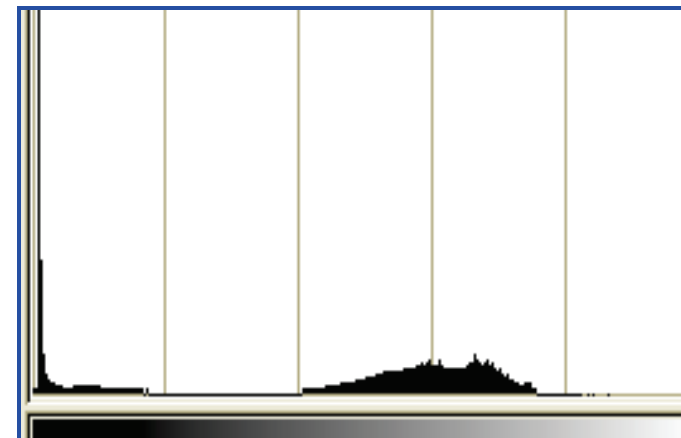
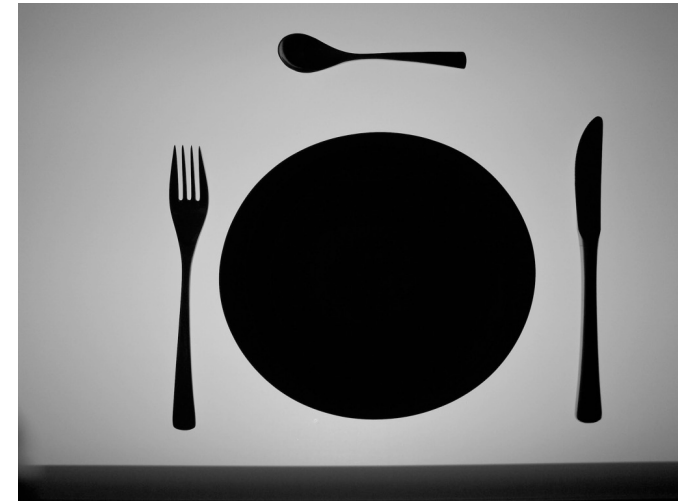
Histogramm

- ▶ Frage an das Auditorium:
Warum gibt es nicht nur zwei
Grauwerte?



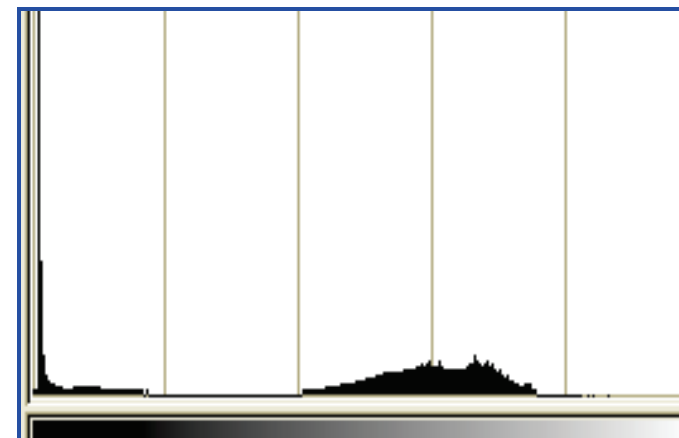
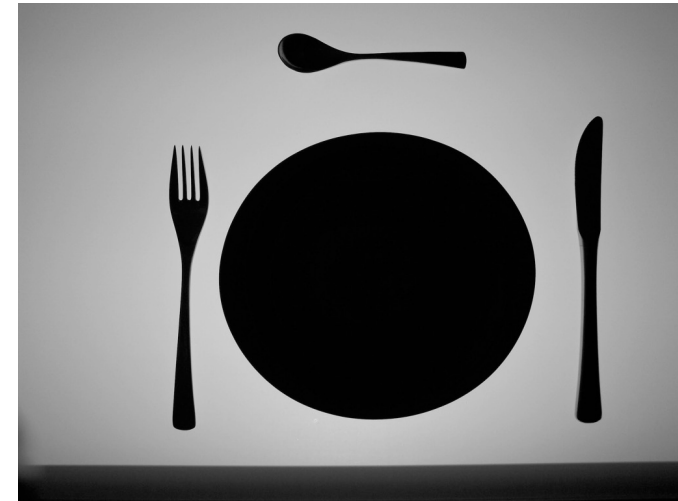
Histogramm

- ▶ **Frage an das Auditorium:**
Warum gibt es nicht nur zwei Grauwerte?
 - ▶ Pixel am hell/dunkel Rand
 - ▶ Ungleich verteilte Resthelligkeit
 - ▶ Inhomogener unterer Rand
- ▶ **Warum ist der helle Bereich breiter als der dunkle?**



Histogramm

- ▶ **Frage an das Auditorium:**
Warum gibt es nicht nur zwei Grauwerte?
 - ▶ Pixel am hell/dunkel Rand
 - ▶ Ungleich verteilte Resthelligkeit
 - ▶ Inhomogener unterer Rand
- ▶ **Warum ist der helle Bereich breiter als der dunkle?**
 - ▶ Außer bei Speziallampen ist Beleuchtung meist ungleichmäßig.
 - ▶ Schatten ist das Fehlen von Beleuchtung und wird nicht von der Beleuchtung beeinflusst.

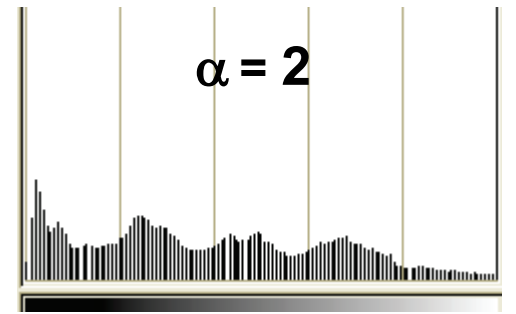
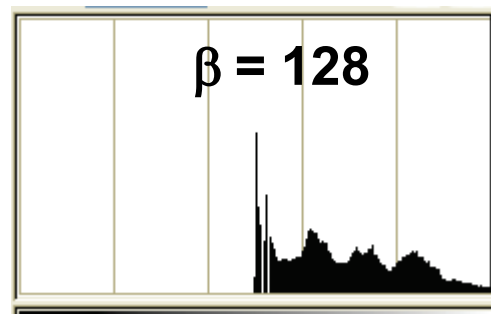
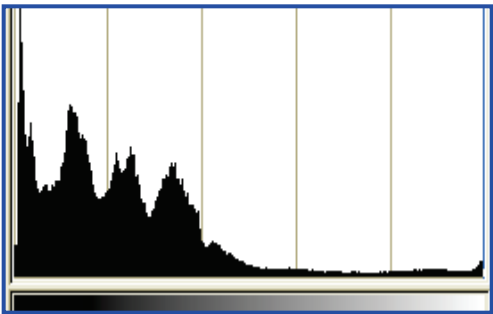


Histogramm

Einfluss der Beleuchtung auf das Histogramm:

- ▶ **Belichtung, Verstärkung, Blende und Beleuchtungsstärke führen (im Wesentlichen) zu einer Multiplikation des Grauwertes**
 - ▶ \Rightarrow Skalierung des Histogramms
- ▶ **Nicht perfekt dunkle Flächen führen (im Wesentlichen) zu Addition auf den Grauwert**
 - ▶ \Rightarrow Verschiebung des Histogramms
- ▶ **Theoretisch vereinfachtes Modell für Änderung der Helligkeit:**
 - ▶ Lineare Grauwertänderung: $i \mapsto \alpha i + \beta$
- ▶ **Systeme, die in der Praxis beleuchtungsunabhängig sein sollen, sollten in der Theorie (im Wesentlichen) invariant unter linearer Grauwertänderung sein**
- ▶ **Problemfall: $\alpha \rightarrow 0$**

Histogramm

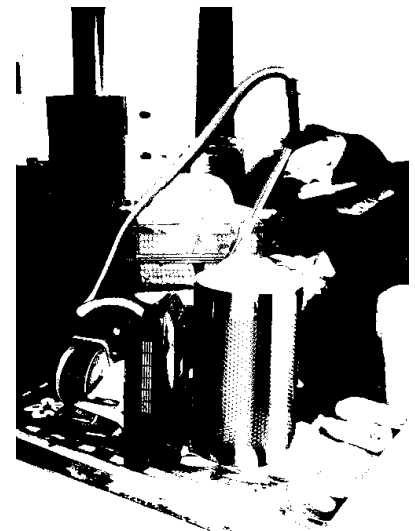
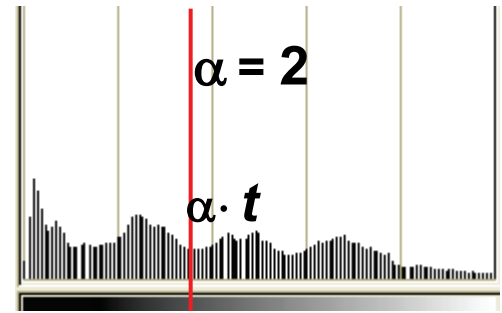
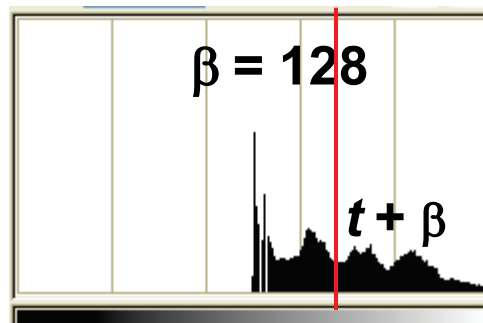
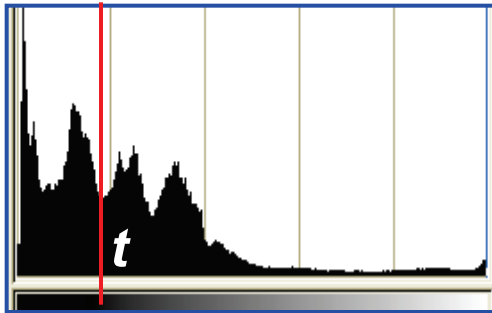


Automatischer Schwellwert (Otsu)

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Aufgabenstellung

- ▶ Gegeben ein Histogramm eines Bildes mit hellen und dunklen Regionen, suche einen Schwellwert t um die Regionen zu trennen.
- ▶ Übungen: Fester von Hand eingestellter Schwellwert
- ▶ Hier: Resultierendes Binärbild soll linear Beleuchtungsinvariant sein
 - ▶ Grauwerte $+\beta$ im Histogramm \Rightarrow Schwellwert $+\beta$
 - ▶ Grauwerte $\cdot \alpha$ im Histogramm \Rightarrow Schwellwert $\cdot \alpha$



Automatischer Schwellwert (Otsu)

Aufgabenstellung

- ▶ Gegeben ein Histogramm eines Bildes mit hellen und dunklen Regionen, suche einen Schwellwert t um die Regionen zu trennen.
- ▶ Frage an das Auditorium:
Wie könnte man einen Schwellwert abhängig vom Histogramm definieren, so dass er unabhängig von linearer Grauwertänderung ist?

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Aufgabenstellung

- ▶ Gegeben ein Histogramm eines Bildes mit hellen und dunklen Regionen, suche einen Schwellwert t um die Regionen zu trennen.
- ▶ Frage an das Auditorium:
Wie könnte man einen Schwellwert abhängig vom Histogramm definieren, so dass er unabhängig von linearer Grauwertänderung ist?
 - ▶ Mittelwert (nicht so gut wenn hell / dunkel unterschiedlich groß)
 - ▶ Median (ähnliches Problem, wie Mittelwert)
 - ▶ Relativ zu Mittelwert μ und Standardabweichung σ mit manuellem Parameter λ
$$t = \mu + \lambda\sigma$$
 - ▶ Minimum „zwischen den Bergen“ (gute Idee, aber schwer zu formalisieren wegen lokaler Minima)

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Otsu – Algorithmus

- ▶ **Paradigma (auch vieler anderer Algorithmen):**
 - ▶ *Definiere ein parametrisiertes Idealmodell, wie das Bild sein sollte und suche die Modellparameter, mit denen es besten zum realen Bild passt.*
- ▶ **„Seltsame Effekte“ werden bewusst ignoriert, so lange sie praktisch das Resultat nicht zu sehr beeinflussen**
- ▶ **Ansatz im Otsu-Algorithmus**
 - ▶ Idealmodell ist Bild i'_p mit nur zwei nur zwei Grauwerten i_{low} und i_{high} .
 - ▶ Fehler: Quadratischer Abstand zu idealem Bild

$$e(i, i') = \sum_{\text{Pixel } p} (i_p - i'_p)^2$$

- ▶ Suche ideales Bild (mit 2 Grauwerten) mit minimalen Fehler

$$\underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\text{argmin}} e(i, i'_p) = \underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\text{argmin}} \sum_{\text{Pixel } p} (i_p - i'_p)^2$$

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Beleuchtungsinvarianz

- ▶ **Klasse idealer Bilder ist beleuchtungsinvariant**
 - ▶ i' Bild mit 2 Grauwerten (i_{low}, i_{high})
 - ▶ $\Rightarrow \alpha i' + \beta$ Bild mit 2 Grauwerten ($\alpha i_{low} + \beta, \alpha i_{high} + \beta$)
- ▶ **Fehlermaß ist beleuchtungsinvariant**
 - ▶ bis auf Faktor α^2

$$e(\alpha i + \beta, \alpha i' + \beta) = \sum_{\text{Pixel } p} ((\alpha i_p + \beta) - (\alpha i'_p + \beta))^2 =$$

$$\sum_{\text{Pixel } p} (\alpha i_p - \alpha i'_p)^2 = \alpha^2 \sum_{\text{Pixel } p} (i_p - i'_p)^2 = \alpha^2 e(i, i')$$

- ▶ \Rightarrow **Binärbild ist beleuchtungsinvariant**

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Reduktion auf zwei Helligkeiten

- ▶ **Brute-force Minimierung über alle Bilder mit 2 Grauwerten ist völlig unmöglich**

$$\underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\operatorname{argmin}} e(i, i'_p) = \underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\text{Pixel } p} (i_p - i'_p)^2$$

- ▶ **Frage an das Auditorium: Gibt es eine pfiffigere Art, das am besten passende Bild mit 2 Grauwerten zu bestimmen?**

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Reduktion auf Minimierung über zwei Grauwerte

- ▶ **Brute-force Minimierung über alle Bilder mit 2 Grauwerten ist völlig unmöglich**

$$\underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\operatorname{argmin}} e(i, i'_p) = \underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\text{Pixel } p} (i_p - i'_p)^2$$

- ▶ **Frage an das Auditorium: Gibt es eine pfiffigere Art, das am besten passende Bild mit 2 Grauwerten zu bestimmen?**
- ▶ **Wenn i_{low} und i_{high} gegeben, ist i'_p der von beiden, der i_p näher liegt.**
- ▶ **Statt über i_p minimierung, über i_{low} und i_{high} minimieren**

$$e(i, i_{\text{low}}, i_{\text{high}}) = \sum_{\text{Pixel } p} \min \left\{ (i_p - i_{\text{low}})^2, (i_p - i_{\text{high}})^2 \right\}$$

$$\underset{\substack{i'_p \text{ Bild mit} \\ 2 \text{ Grauwerten}}}{\min} e(i, i'_p) = \underset{i_{\text{low}}, i_{\text{high}}}{\min} e(i, i_{\text{low}}, i_{\text{high}}) = \underset{i_{\text{low}}, i_{\text{high}}}{\min} \sum_{\text{Pixel } p} \min \left\{ (i_p - i_{\text{low}})^2, (i_p - i_{\text{high}})^2 \right\}$$

Automatischer Schwellwert (Otsu)

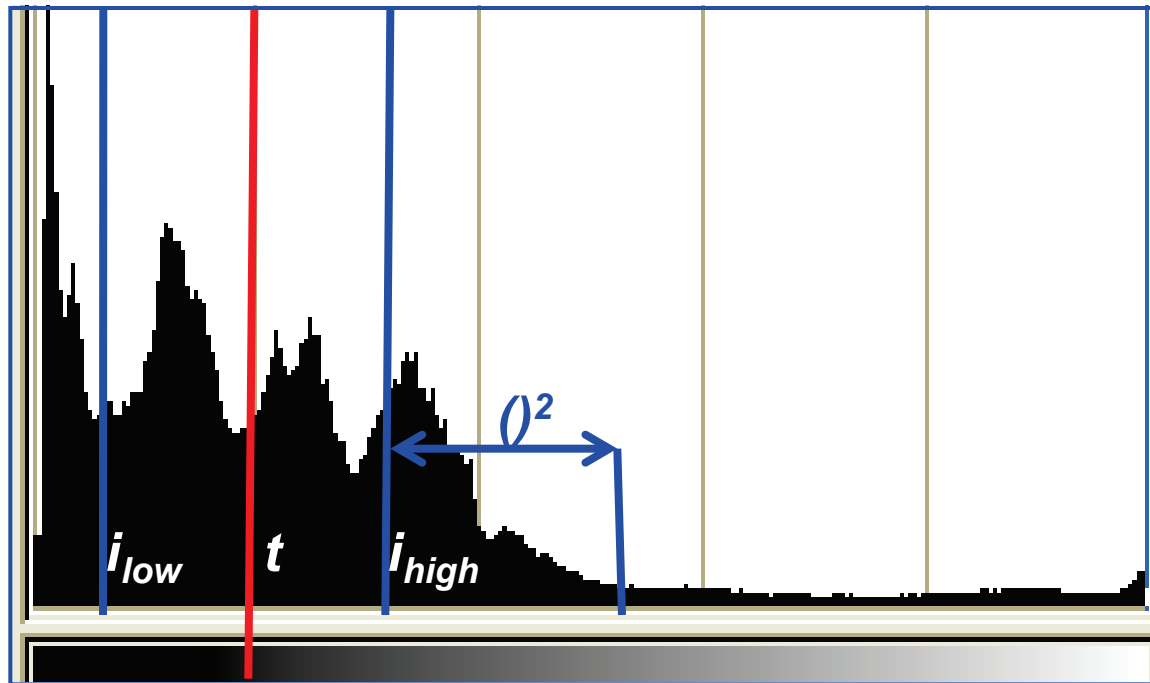
Berechnung aus Histogramm

- ▶ Naive Implementierung: Alle i_{low} (256) und i_{high} (256) und Pixel (z.B. $1024 \times 768 = 786432$), ca. 10 Operationen, zusammen 510G Op.
- ▶ \Rightarrow Effiziente Berechnung für Echtzeitfähigkeit nötig
- ▶ Berechnung aus Histogramm

$$e(i, i_{low}, i_{high}) = \sum_{\text{Pixel } p} \min \left\{ (i_p - i_{low})^2, (i_p - i_{high})^2 \right\} = \sum_{i=0}^{255} h(i) \min \left\{ (i - i_{low})^2, (i - i_{high})^2 \right\}$$

- ▶ 256 Werte summieren, statt Anzahl Pixel
- ▶ Weitere Verbesserung: Intelligentes Suchen der optimalen Parameter i_{low} und i_{high}

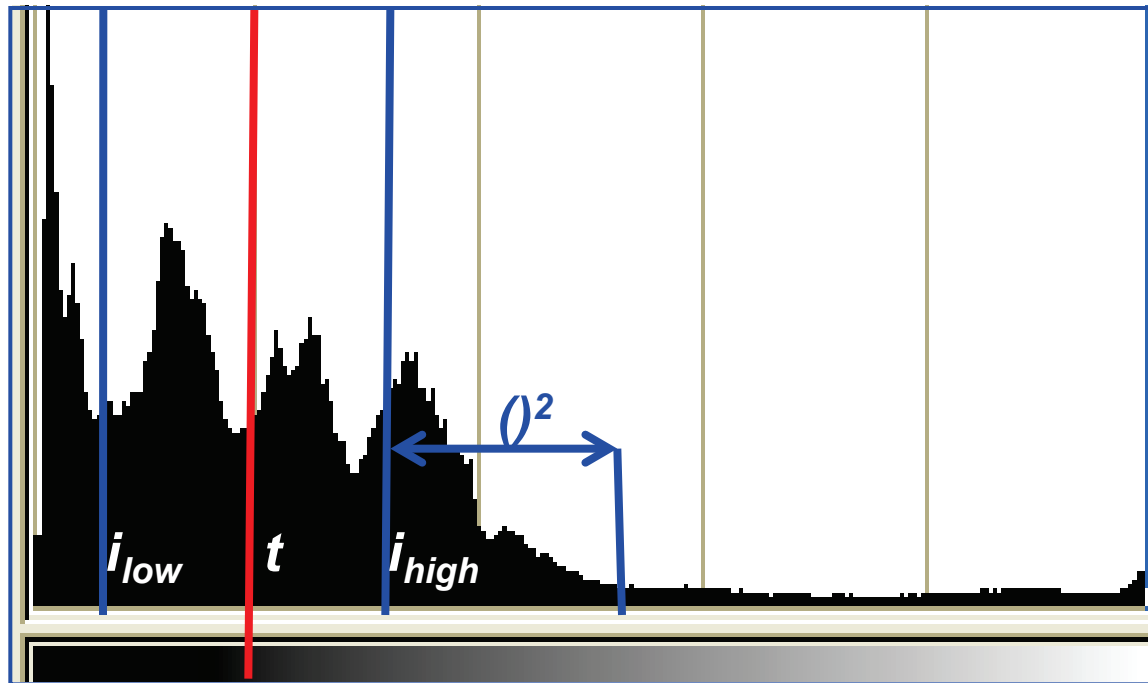
Automatischer Schwellwert (Otsu)



$$\begin{aligned}
 e(h, i_{low}, i_{high}) &= \sum_{i=0}^{255} h(i) \min \left\{ (i - i_{low})^2, (i - i_{high})^2 \right\} \\
 &= \sum_{i=0}^t h(i) (i - i_{low})^2 + \sum_{i=t+1}^{255} h(i) (i - i_{high})^2,
 \end{aligned}$$

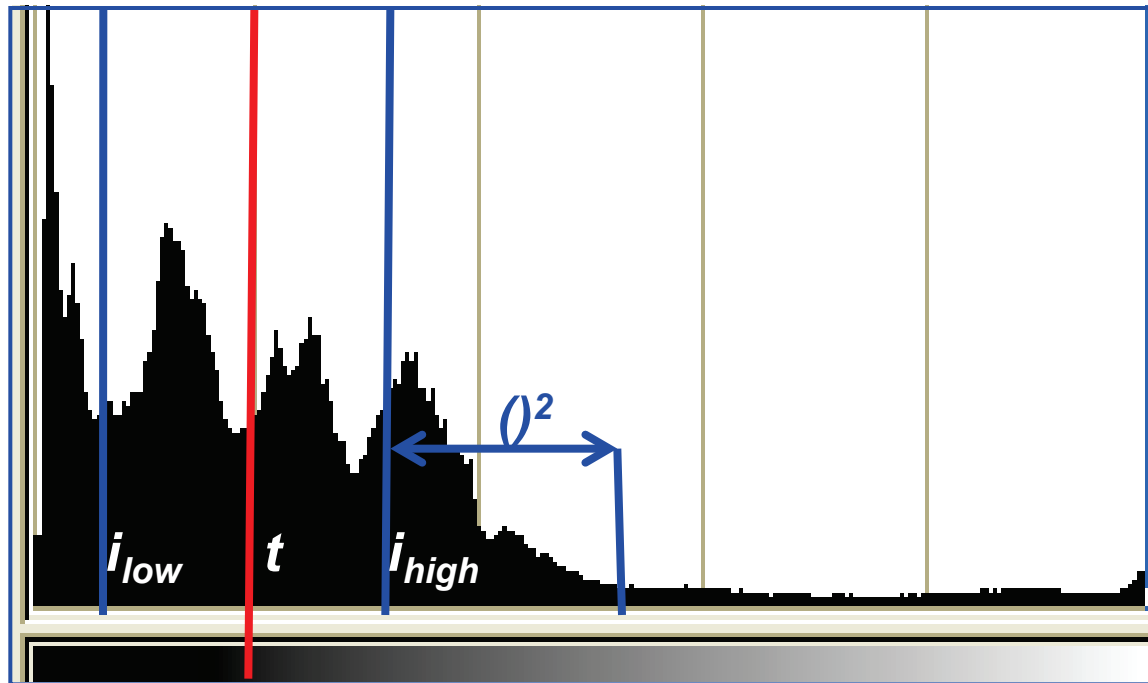
$$t = \frac{i_{low} + i_{high}}{2}$$

Automatischer Schwellwert (Otsu)



- ▶ Frage an das Auditorium:
Was ist das optimale i_{low} bzw. i_{high} für ein gegebenes t ?

Automatischer Schwellwert (Otsu)



- ▶ Frage an das Auditorium:
Was ist das optimale i_{low} bzw. i_{high} für ein gegebenes t ?
- ▶ Der mittlere Grauwert der Pixel $\leq t$ bzw. $> t$

Automatischer Schwellwert (Otsu)

- ▶ **Optimaler Schwellwert gegeben i_{low} und i_{high}**

$$t = \frac{i_{low} + i_{high}}{2} \Rightarrow e(h, t, i_{low}, i_{high}) = \sum_{i=0}^t h(i)(i - i_{low})^2 + \sum_{i=t+1}^{255} h(i)(i - i_{high})^2$$

- ▶ **Optimales i_{low} und i_{high} gegeben t :**

$$\sum_{i=0}^t h(i)(i - i_{low})^2 = \sum_{i=0}^t h(i)(i^2 - 2ii_{low} + i_{low}^2) = \sum_{i=0}^t h(i)i^2 - 2i_{low} \sum_{i=0}^t h(i)i + i_{low}^2 \sum_{i=0}^t h(i)$$

$$0 \stackrel{\text{Ableitung}}{=} -2 \sum_{i=0}^t h(i)i + 2i_{low} \sum_{i=0}^t h(i) \Rightarrow i_{low} = \frac{\sum_{i=0}^t h(i)i}{\sum_{i=0}^t h(i)}$$

$$\min_{i_{low}} \sum_{i=0}^t h(i)(i - i_{low})^2 = \sum_{i=0}^t h(i) \left[i^2 - 2i \frac{\sum_{i=0}^t h(i)i}{\sum_{i=0}^t h(i)} + \left(\frac{\sum_{i=0}^t h(i)i}{\sum_{i=0}^t h(i)} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=0}^t h(i)i^2 - 2 \left(\frac{\sum_{i=0}^t h(i)i}{\sum_{i=0}^t h(i)} \right)^2 \sum_{i=0}^t h(i) + \left(\frac{\sum_{i=0}^t h(i)i}{\sum_{i=0}^t h(i)} \right)^2 \sum_{i=0}^t h(i) = \sum_{i=0}^t h(i)i^2 - \frac{\left(\sum_{i=0}^t h(i)i \right)^2}{\sum_{i=0}^t h(i)}$$

Automatischer Schwellwert (Otsu)

- ▶ **Effiziente Berechnung (für Echtzeitfähigkeit)**

$$e(h, t) = \left(\sum_{i=0}^t h(i)i^2 - \left(\sum_{i=0}^t h(i)i \right)^2 / \sum_{i=0}^t h(i) \right) + \left(\sum_{i=t+1}^{255} h(i)i^2 - \left(\sum_{i=t+1}^{255} h(i)i \right)^2 / \sum_{i=t+1}^{255} h(i) \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{255} h(i)i^2 - \left(\sum_{i=0}^t h(i)i \right)^2 / \sum_{i=0}^t h(i) - \left(\sum_{i=t+1}^{255} h(i)i \right)^2 / \sum_{i=t+1}^{255} h(i)$$

- ▶ **Berechnung des optimalen t durch Laufsumme**
- ▶ **Beobachtung: $t=-1$ bzw. 255 , ist schlechtestes t**

Automatischer Schwellwert (Otsu)

$$e(t) = \sum_{i=0}^{255} h(i)i^2 - \left(\sum_{i=0}^t h(i)i \right)^2 / \sum_{i=0}^t h(i) - \left(\sum_{i=t+1}^{255} h(i)i \right)^2 / \sum_{i=t+1}^{255} h(i)$$

```
sumI2 = sumLow = sumILow = sumHigh = sumIHigh = 0;
```

```
for (i=0;i<256;i++) {
```

```
    sumHigh += h[i];
```

```
    sumIHigh += h[i]*i;
```

```
    sumI2 += h[i]*i*i;
```

```
}
```

```
bestT = -1; worstError = bestError = sumI2-sumIHigh*sumIHigh/sumHigh;
```

```
for (t=0;t<256;t++) { // Laufe durch alle möglichen Schwellwerte
```

```
    sumLow += h[t]; sumILow += h[t]*t; // passe die bis t Summen an
```

```
    sumHigh -= h[t]; sumIHigh -= h[t]*t; // passe die ab t Summen an
```

```
    if (sumLow>0 && sumHigh>0) {
```

```
        error = sumI2-sumILow*sumILow/sumLow -sumIHigh*sumIHigh/sumHigh;
```

```
        if (error<bestError) {bestError = error; bestT = t;}  
    }
```

```
}
```

Automatischer Schwellwert (Otsu)

- ▶ **Rechenaufwand:**
 - ▶ Histogramm: $1024 \times 768 \times 2 = 1.6\text{M}$ Operationen
 - ▶ 256 Schleifendurchläufe mit je 20 Operationen, = 5.2K Operationen
- ▶ **statt 510G Operationen für naive Implementierung**
- ▶ **oder länger als das Universum lebt für ganz naive Implementierung**

Automatischer Schwellwert (Otsu)

Was ist, wenn es kein klar trennbares Hell/Dunkel gibt?

- ▶ Berechne ein Qualitätsmaß und weise das Bild zurück, wenn es zu schlecht ist.
- ▶ Qualitätsmaß sollte wohl fundiert und invariant unter linearer Beleuchtungsänderung sein.
- ▶ $\min_{i_{low}, i_{high}} e(h, i_{low}, i_{high})$ beschreibt, wie gut das Bild zu dem Modell passt, dass es zwei Helligkeitsklassen gibt.
- ▶ $\min_i e(h, i, i)$ beschreibt die Gegenhypothese, dass es nur eine Helligkeitsklasse gibt und ist damit größer
- ▶ $\min_i e(h, i, i)$ schon berechnet in `worstError`

Automatischer Schwellwert (Otsu)

- ▶ **Invariantes Qualitätsmass (0 ideal, 1 schlechtestmöglich):**

$$\min_{i_{low}, i_{high}} e(i_{low}, i_{high}) / \min_i e(i, i)$$

- ▶ **bestError/worstError**
- ▶ **Oberhalb eines Grenzwertes (z.B. 0.2) zurückweisen, sonst mit optimalem Schwellwert segmentieren**
- ▶ **Frage an das Auditorium: Was passiert bei weißen aber ganz leicht verrauschtem Bild?**

Automatischer Schwellwert (Otsu)

- ▶ **Invariantes Qualitätsmass (0 ideal, 1 schlechtestmöglich):**

$$\min_{i_{low}, i_{high}} e(i_{low}, i_{high}) / \min_i e(i, i)$$

- ▶ **bestError/worstError**
- ▶ **Oberhalb eines Grenzwertes (z.B. 0.2) zurückweisen, sonst mit optimalem Schwellwert segmentieren**
- ▶ **Frage an das Auditorium: Was passiert bei weißen aber ganz leicht verrauschtem Bild?**
- ▶ **Wenn es z.B. nur die Werte 100 und 101 gibt (wegen diskreter Grauwerte), werden diese ideal zwei Klassen zugewiesen.**

Automatischer Schwellwert (Otsu)

- ▶ **Invariantes Qualitätsmass (0 ideal, 1 schlechtestmöglich):**

$$\min_{i_{low}, i_{high}} e(i_{low}, i_{high}) / \min_i e(i, i)$$

- ▶ **Mit minimalen Kontrast ε (mindestens 1 oder höher):**

$$\min_{i_{low}, i_{high}} \left(e(i_{low}, i_{high}) + \sum_{i=0}^{255} h(i) \varepsilon^2 \right) / \left(\min_i e(i, i) + \sum_{i=0}^{255} h(i) \varepsilon^2 \right)$$

- ▶ **(bestError+w*h*eps*eps) / (worstError+w*h*eps*eps)**
- ▶ **Hier wird die Beleuchtungsinvarianz absichtlich durchbrochen, weil nicht beliebig geringe Kontraste erkannt werden sollen.**
- ▶ **Oberhalb eines Grenzwertes (z.B. 0.2) zurückweisen, sonst mit optimalem Schwellwert segmentieren**
- ▶ **Wichtige Vorgehensweise: Beleuchtungsinvarianz für kleine Kontraste aufheben. Z.B. rechnerisches Addieren von Rauschen.**

Charakteristische Größen

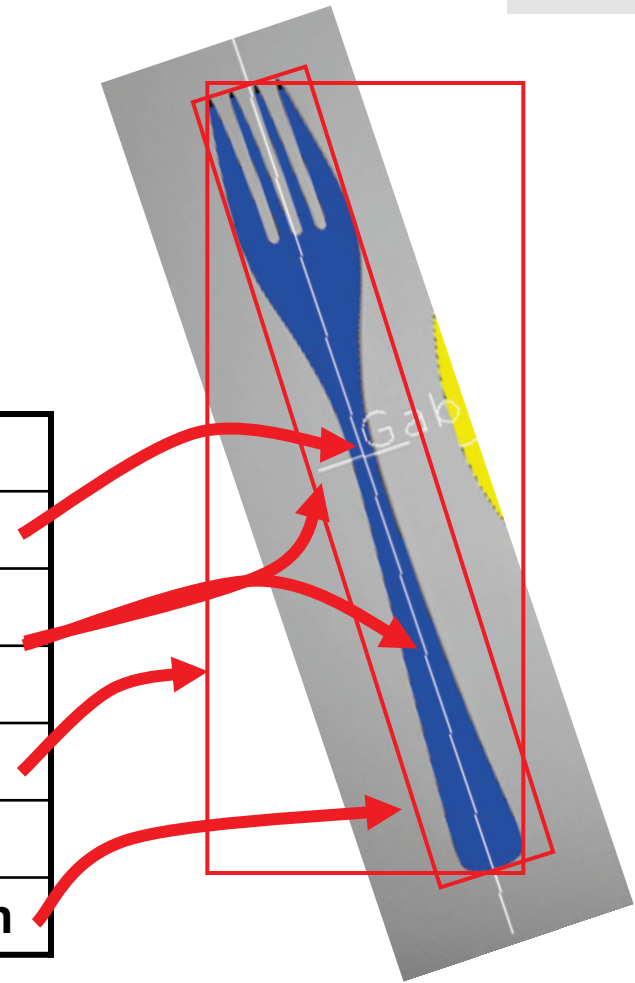
Charakteristische Größen

- ▶ Größen die aus den zusammenhängenden Regionen berechnet werden
- ▶ Grundlage für Klassifikation (Was ist es?, Ist es korrekt?)
- ▶ Grundlage für Position / Lagebestimmung (Wo ist es?)

Fläche	0. Ordn.	Was? Wie groß?
Schwerpunkt	1. Ordn.	Wo (Pos.)?
Hauptträgheitsachse	2. Ordn.	Wo (Orient.)?
Hauptträgheitsmomente	2. Ordn.	Was? Wie groß?
Bounding Box		Was? Wie groß?
Umfang bzw. Umfang/Fläche		Was?
Länge / Breite in Hauptträgheitsrichtungen		Was? Wie groß?

Charakteristische Größen

Fläche
Schwerpunkt
Hauptträgheitsachse
Hauptträgheitsmomente
Bounding Box
Umfang bzw. Umfang/Fläche
Länge / Breite in Hauptträgheitsrichtungen



Charakteristische Größen

Momente

- ▶ Definiert als Integral von $x^i y^j$ über die Region Ω :

$$\int_{(x,y) \in \Omega} x^i y^j dx dy$$

- ▶ $i+j$ heisst Ordnung
- ▶ Eigenschaft: Additivität, d.h. Summe der Momente von Teilregionen ist das Moment der Gesamtregion
- ▶ Für durch Intervalle dargestellte Region: Summe der Momente der Intervalle
- ▶ Berechnung über Formel angewandt auf jedes Intervalle und summieren

Charakteristische Größen

Moment 0. Ordnung (Fläche):

$$A = I = \int_{(x,y) \in \Omega} 1 dx dy$$

- ▶ Fläche eines Intervalls (x_{lo} , x_{hi} , y) ist:

$$I(x_{lo}, x_{hi}, y) = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \int_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} 1 dx dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} [x]_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} x_{hi} - x_{lo} + 1 dy = x_{hi} - x_{lo} + 1$$

- ▶ Fläche einer Region als Summe über die Flächen der Intervalle

Charakteristische Größen

Momente 1. Ordnung: I_x, I_y

$$I_x = \int_{(x,y) \in \Omega} x dx dy \quad I_y = \int_{(x,y) \in \Omega} y dx dy$$

► Momente 1. Ordnung eines Intervalls (xlo, xhi, y)

$$I_x(xlo, xhi, y) = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \int_{xlo-\frac{1}{2}}^{xhi+\frac{1}{2}} x dx dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{xlo-\frac{1}{2}}^{xhi+\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{(xhi + \frac{1}{2})^2 - (xlo - \frac{1}{2})^2}{2} = \frac{xhi(xhi + 1) - xlo(xlo - 1)}{2}$$

$$I_y(xlo, xhi, y) = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \int_{xlo-\frac{1}{2}}^{xhi+\frac{1}{2}} y dx dy = (xhi - xlo + 1) \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} y dy$$

$$= (xhi - xlo + 1) \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} = (xhi - xlo + 1) \frac{(y + \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2}{2} = (xhi - xlo + 1) y$$

► Momente einer Region als Summe der Momente der Intervalle

Charakteristische Größen

Momente 2. Ordnung: I_{xx} , I_{xy} , I_{yy}

$$I_{xx} = \int_{(x,y) \in \Omega} x^2 dx dy$$

$$I_{xy} = \int_{(x,y) \in \Omega} xy dx dy$$

$$I_{yy} = \int_{(x,y) \in \Omega} y^2 dx dy$$

► Momente 2. Ordnung eines Intervalles (x_{lo}, x_{hi}, y)

$$I_{xx} = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \int_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} x^2 dx dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} dy = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} = \frac{(x_{hi} + \frac{1}{2})^3 - (x_{lo} - \frac{1}{2})^3}{3}$$

$$I_{xy} = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \int_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} xy dx dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} y \frac{x_{hi}(x_{hi}+1) - x_{lo}(x_{lo}-1)}{2} dy$$

$$= \frac{x_{hi}(x_{hi}+1) - x_{lo}(x_{lo}-1)}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} = \frac{(x_{hi}(x_{hi}+1) - x_{lo}(x_{lo}-1))y}{2}$$

Charakteristische Größen

- ▶ **Momente 2. Ordnung eines Intervalles (x_{lo}, x_{hi}, y)**

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \int_{x_{lo}-\frac{1}{2}}^{x_{hi}+\frac{1}{2}} y^2 dx dy = \int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} y^2 (x_{hi} - x_{lo} + 1) dy = (x_{hi} - x_{lo} + 1) \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \\ &= (x_{hi} - x_{lo} + 1) \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^3}{3} = (x_{hi} - x_{lo} + 1) \frac{3y^2 + \frac{1}{4}}{3} \\ &= (x_{hi} - x_{lo} + 1) \left(y^2 + \frac{1}{12}\right) \end{aligned}$$

- ▶ **Momente einer Region als Summe der Momente der Intervalle**
- ▶ **Was macht man mit den Momenten 2. Ordnung?**

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

Schwerpunkt

- ▶ Berechnung als $(x_s, y_s) = (I_x/I, I_y/I)$

$$0 = \int_{(x,y) \in \Omega} (x - x_s) dx dy$$

$$= \int_{(x,y) \in \Omega} x dx dy - x_s \int_{(x,y) \in \Omega} 1 dx dy$$

$$= I_x - x_s I$$

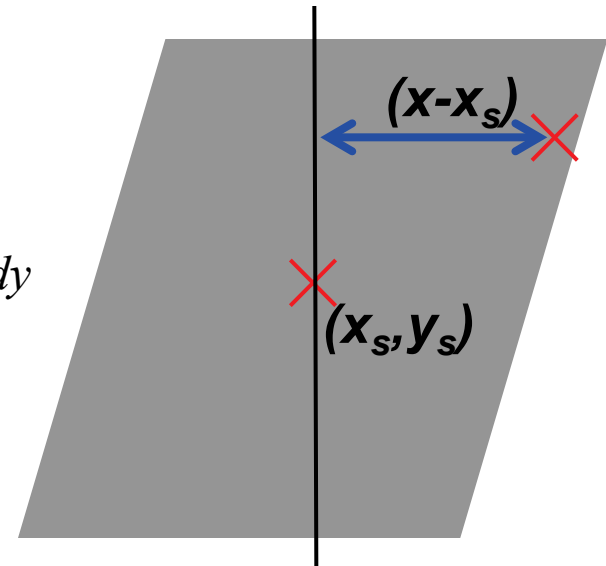
$$x_s = \frac{I_x}{I}$$

$$0 = \int_{(x,y) \in \Omega} (y - y_s) dx dy$$

$$= \int_{(x,y) \in \Omega} y dx dy - y_s \int_{(x,y) \in \Omega} 1 dx dy$$

$$= I_y - y_s I$$

$$y_s = \frac{I_y}{I}$$



- ▶ I, I_x, I_y und Fläche plus Schwerpunkt enthalten die selbe Information
- ▶ I, I_x, I_y sind additiv daher leichter für Regionen zu berechnen
- ▶ Fläche und Schwerpunkt haben inhaltliche Bedeutung
- ▶ Daher: erst I, I_x, I_y ausrechnen, dann daraus Fläche/Schwerpunkt

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

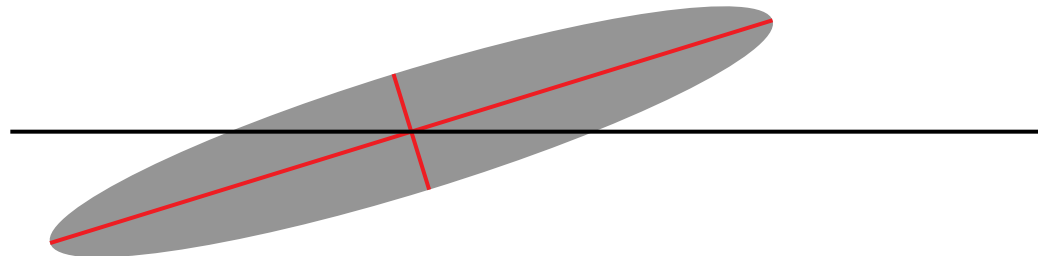
Schwerpunkt

- ▶ **Schwerpunkt erlaubt zu bestimmen, wo ein Objekt im Bild ist**
- ▶ **Meist mit unter 1 Pixel Genauigkeit, weil über viele Pixel gemittelt**
- ▶ **Genereller Vorteil integraler Größen**
- ▶ **Genauer, als Mitte der Bounding Box**

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

Hauptträgheitsachsen

- ▶ *Betrachte für verschiedene Geraden die mittlere quadratische Distanz zur Geraden als Maß für die „Ausdehnung“ quer zur Geraden.*
- ▶ Hat spezielle mathematische Struktur (Theorie der Eigenwerte)
- ▶ I_{xx}/I bzw. I_{yy}/I für vertikale bzw. horizontale Ursprungsgerade
- ▶ Läßt sich für beliebige Geraden aus den Momenten 0.-2. Ordnung berechnen.
- ▶ Unter parallelen Geraden ist die durch den Schwerpunkt minimal
- ▶ Unter Schwerpunktgeraden min. und max senkrecht



Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

Kochrezept für Hauptträgheitsachsen

- ▶ **1) Berechne mittleren Wert von x^2 , xy , y^2 mit $(0,0)$ im Schwerpunkt als 2×2 Matrix**

$$I'_{xx} = \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} (x - x_s)^2 dx dy$$

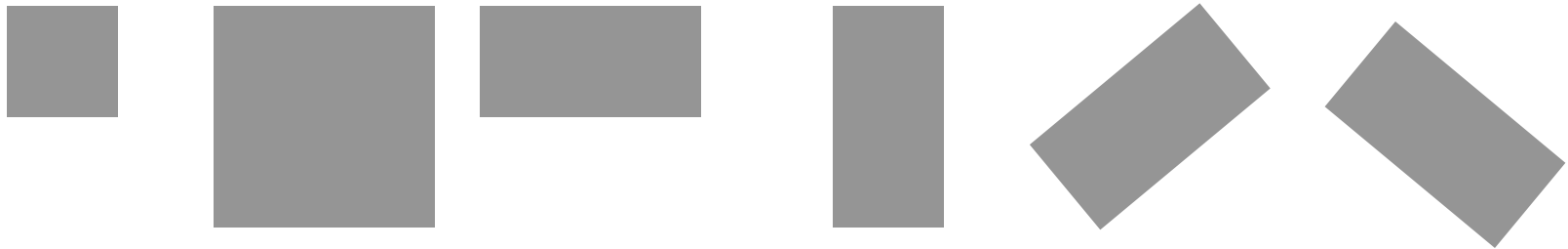
$$= \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} x^2 dx dy - \frac{2x_s}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} x dx dy + \frac{x_s^2}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} 1 dx dy = \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} x^2 dx dy - x_s^2 = \frac{I_{xx}}{I} - x_s^2$$

$$I'_{xy} = \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} (x - x_s)(y - y_s) dx dy = \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} xy dx dy - x_s y_s = \frac{I_{xy}}{I} - x_s y_s$$

$$I'_{yy} = \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} (y - y_s)^2 dx dy = \frac{1}{I} \int_{(x,y) \in \Omega} y^2 dx dy - y_s^2 = \frac{I_{yy}}{I} - y_s^2$$

$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} \\ I'_{xy} & I'_{yy} \end{pmatrix}$$

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

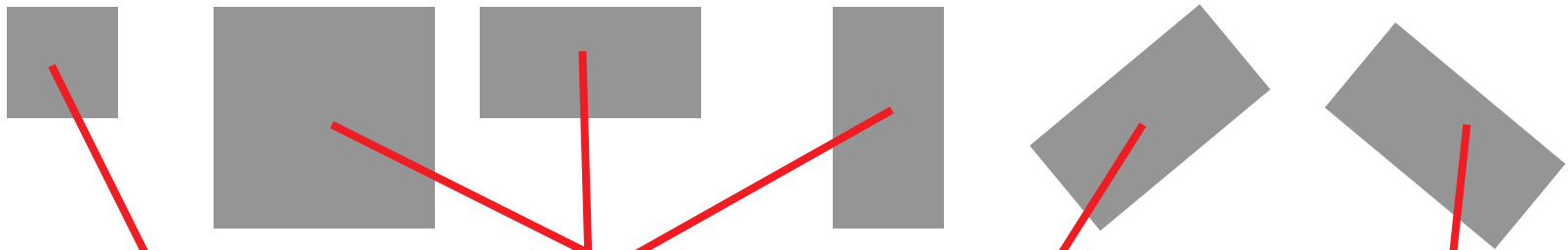


$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} \\ I'_{xy} & I'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Mittlerer Wert von x^2 , xy , y^2 mit $(0,0)$ im Schwerpunkt als 2×2 Matrix

Frage an das Auditorium: Welche Matrix passt zu welcher Figur?

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen



$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} \\ I'_{xy} & I'_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Mittlerer Wert von x^2 , xy , y^2 mit $(0,0)$ im Schwerpunkt als 2×2 Matrix

Frage an das Auditorium: Welche Matrix passt zu welcher Figur?

Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

Kochrezept für Hauptträgheitsachsen

- ▶ **2) Berechne sogenannte Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren, dargestellt als Winkel θ , der Matrix**

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan 2 \left(-2I'_{xy}, I'_{yy} - I'_{xx} \right),$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta,$$

$$\lambda_1 = c^2 I'_{xx} + 2cs I'_{xy} + s^2 I'_{yy}$$

$$\lambda_2 = s^2 I'_{xx} - 2cs I'_{xy} + c^2 I'_{yy}$$

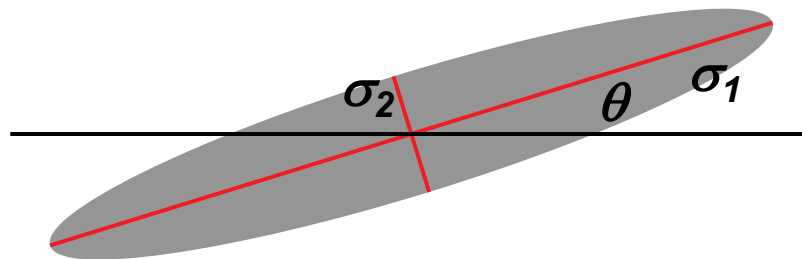
$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} \\ I'_{xy} & I'_{yy} \end{pmatrix}$$

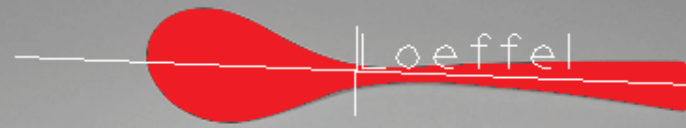
Schwerpunkt & Hauptträgheitsachsen

Kochrezept für Hauptträgheitsachsen

- ▶ 3) Bestimme Richtungen als θ und $\theta + \pi/2$
- ▶ 4) Bestimme Ausdehnung, als Halbmesser einer äquivalenten Ellipse durch die Formeln

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\lambda_1}, \quad \sigma_2 = 2\sqrt{\lambda_2}$$





Loeffel



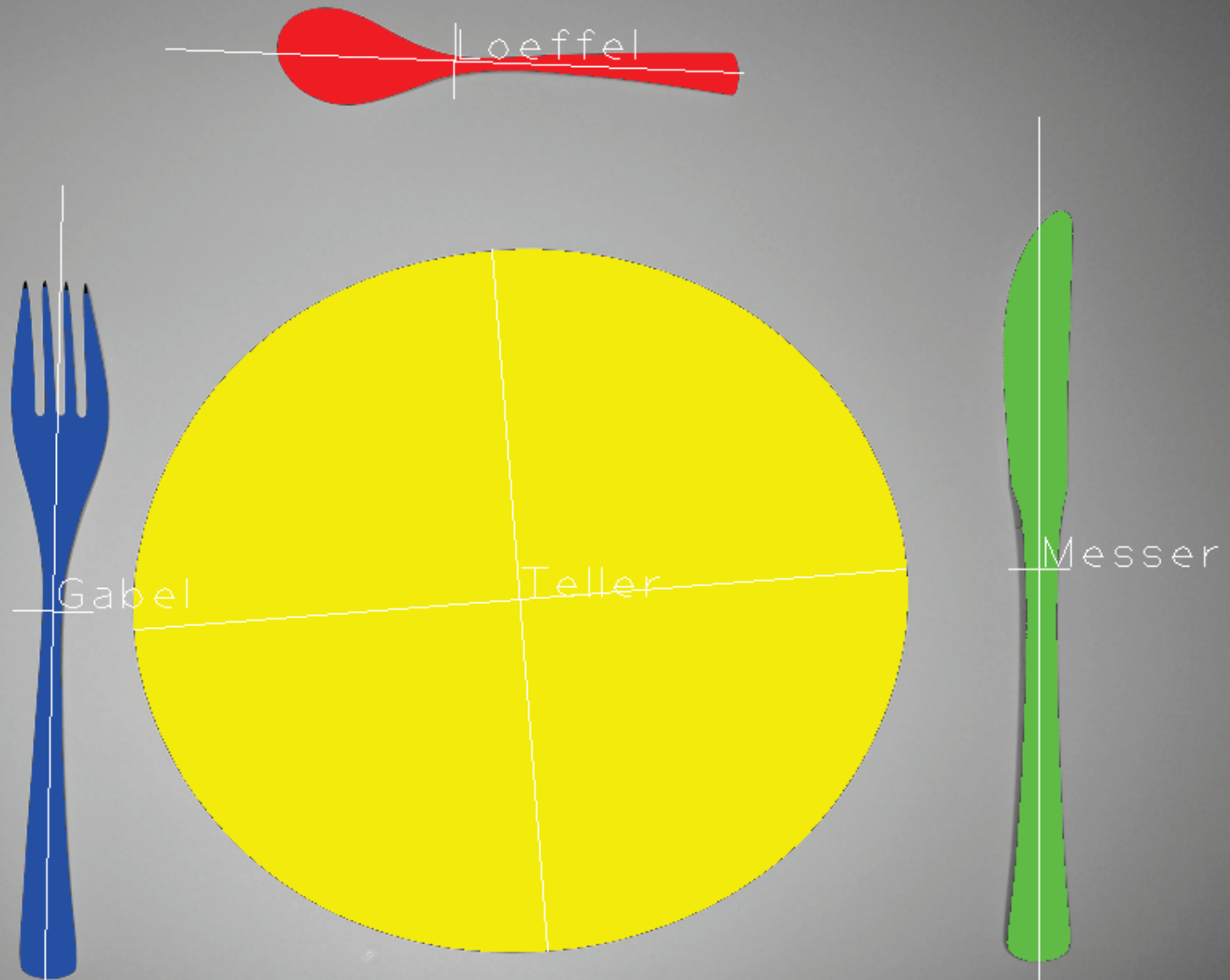
Gabel



Teller



Messer



► **Frage an das Auditorium:**

**Warum passen die Halbmesser beim Teller gut, aber ragen über
Messer, Gabel und Löffel hinaus.**

Zusammenfassung

Viele Formeln. Was muß man mitnehmen?

- ▶ **Nicht alle Formeln auswendig (weder im Leben noch in der Prüfung).**
- ▶ **Momente sind Integrale von $x^i y^j$ über die betrachtete Region**
 - ▶ Moment 0. Ordnung: I ist Integral über 1, die Fläche
 - ▶ Momente 1. Ordnung: I_x, I_y sind Integral über x bzw. y
 - ▶ Momente 2. Ordnung: I_{xx}, I_{xy}, I_{yy} sind Integral über x^2, xy, y^2
- ▶ **Geschlossene Formeln für Intervall, Summe Intervalle einer Region**
- ▶ **Schwerpunkt $I_x/I, I_y/I$ bestimmt Position der Region**
- ▶ **Aus Eigensystem der Momente 2. Ordnung Matrix (Formel)**
 - ▶ Erst auf den Schwerpunkt verschieben und durch I teilen
 - ▶ Hauptachsenrichtung θ bestimmt Orientierung der Region. Nur definiert, wenn nicht (fast) kreisförmig.
 - ▶ σ_1, σ_2 bestimmen großen / kleinen Halbmesser äquivalenter Ellipse (Größe bzw. Länglichkeit)

Zusammenfassung

- ▶ **Lineare Beleuchtungsinvarianz** heißt unabhängig von $i \mapsto \alpha i + \beta$
- ▶ **Automatischer Schwellwert nach Otsu aus Histogramm:**
 - ▶ Minimiert den quadratischen Fehler beim Zuordnen zu zwei Grauwerten
 - ▶ Qualitätsschwelle im Vergleich zu Fehler beim Zuordnen zu einem Grauwert
 - ▶ Echtzeitimplementierung durch Laufsummen
- ▶ **Momente 0-2 Ordnung bestimmen Position (Schwerp.), Orientierung (Hauptträgheitsachse) und Gestalt (Hauptträgheitsmomente)**
- ▶ **Symbolisiert durch äquivalente Ellipse (Halbmesser)**
- ▶ **$(I, I_x, I_y, I_{xx}, I_{xy}, I_{yy})$ als Integral definiert, Summe über Intervallformel**
- ▶ **Hauptträgheitseigenschaften aus Eigensystem von**

$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} \\ I'_{xy} & I'_{yy} \end{pmatrix}$$