Prof. Dr. Rolf Drechsler, drechsler@informatik.uni-bremen.de, MZH 3510
Dipl.-Inf. Beate Muranko, bmuranko@informatik.uni-bremen.de, MZH 3550

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Die folgenden Mengen wurden bereits in der Vorlesung vorgestellt ($n, m \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} B_n = &\quad \{f | f : B^n \to B\} \\ B_{n,m} = &\quad \{f | f : B^n \to B^m\} \end{aligned}$$

Berechne die Kardinalität dieser Mengen, d.h. ermittle:
a) $|B_n|$
b) $|B_{n,m}|$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei $\mathcal{B} = (M, \cdot, +, \overline{\cdot})$ eine Boolesche Algebra. Zeige durch ausschließliche Anwendung der Axiome (Kommutatvitität, Assoziativität, Distributivität, Absorption, Auslöschung), dass für $\mathcal{B}$ die folgenden Gesetze gelten:
a) $\exists_1 \mathbf{0} \in M : m \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $m + \mathbf{0} = m, \forall m \in M$
b) $\forall m \in M : m + m = m$
c) $\forall m \in M : \overline{\overline{m}} = m$
d) $\forall m, n \in M : \overline{m + n} = \overline{m} \cdot \overline{n}$

Schreibweise 1: „$\exists_1 m \in M$" heißt: „es gibt genau ein Element m in der Menge M"
Schreibweise 2: „$\forall m \in M$" heißt: „für alle Elemente m der Menge M"
Hinweis: Man darf bei den Teilaufgaben b) und c) davon ausgehen, dass der Beweis in a) erbracht wurde und man darf ebenfalls verwenden, dass analog auch Existenz und Eindeutigkeit eines Eins-Elementes nachweisbar sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Bestimme für die folgende Funktion die Menge der Primimplikanten mit dem Verfahren von Quine-McCluskey:

$$f \in \mathcal{B}_5 \text{ mit } \texttt{ON}(f)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{ \begin{array}{l} (00000), (00010), (00011), (00100), (00101), (00111), \\ (01000), (01001), (10100), (10110), \\ (11000), (11001), (11100), (11110)\} \end{array}$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

a) Zeige, dass es für jede Boolesche Funktion $f \in B_n$ eine *Ringsummendarstellung* gibt, die keine negativen Literale enthält. D.h., beweise folgende Aussage:
Jede Funktion $f \in B_n$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$f = \oplus_{i=1}^{m} x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}}$$

mit

- $\forall 1 \leq i \leq k \left((x_{i_j} \in \{x_1 \dots x_n\} \vee (l_i = 1 \wedge x_{i_1} = 1)) \wedge \forall p \neq q (x_{i_p} \neq x_{i_q}) \right)$,
  d.h. ein Monom ist entweder die Konstante 1 oder besteht vollständig aus positiven Literalen und kein Literal kommt zweimal in einem Monom vor,
- $x_{i_1} \dots x_{i_{l_i}} \neq x_{j_1} \dots x_{j_{l_j}}$ für $i \neq j$,
  d.h. jedes Monom darf maximal einmal auftreten.

b) Zeige oder widerlege:
Die in obiger Gleichung angegebene Darstellung ist für jedes $f \in B_n$ eindeutig.

Zusatzaufgabe (Lösung bitte auf einem extra Blatt abgeben) (10 Punkte)

Die Ringsummendarstellung wird auch „Positive Polarity Reed Muller"-Darstellung (PPRM) genannt, weil zu jeder Variable x nur das *positive* Literal x, nicht aber das negative Literal $\overline{x}$ in der Darstellung einer Funktion vorkommt. Eine Erweiterung stellt die „Fixed Polarity Read Muller"-Darstellung (FPRM) dar. Hierbei wird gewählt, ob zu jeder Variable x *nur* das positive Literal x oder *nur* das negative Literal $\overline{x}$ verwendet wird, aber nicht beide.

a) Gib analog zur Definition eines Ausdrucks in PPRM-Darstellung in Aufgabe 4 a) eine Definition der FPRM-Darstellung an.

b) Gib einen Algorithmus zur Konvertierung eines FPRM-Ausdrucks in einen äquivalenten PPRM-Ausdruck an. Begründe dabei die Äquivalenz der Ein- und Ausgabe des Algorithmus.

c) Die Größe einer FPRM-Darstellung wird in der Anzahl der Monome gemessen (in der vorigen Aufgabe m). Die Wahl der Polarität beeinflusst die Größe sehr stark (vgl. die Funktion $f = \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$ in PPRM-Darstellung). Gib einen Algorithmus zur optimalen Wahl der Polaritäten für eine beliebige Boolesche Funktion an.

d) Beschränkt man sich auf symmetrische Boolesche Funktionen lässt sich die optimale Wahl in polynomial vielen Schritten (in Abhängigkeit von n) treffen. Gib einen Algorithmus an.

Definition: Eine Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt genau dann *symmetrisch*, wenn der Funktionswert durch einen Vektor $w = (w_0, \dots, w_n), w_i \in \{0, 1\}$ angegeben werden kann, wobei

$$w_i = 1$$

gdw.

$$f(a_1, \dots, a_n) = 1 \text{ und } |\{a_j, j = 1 \dots n : a_j = 1\}| = i$$

Anschaulich: Der Funktionswert einer symmetrischen Funktion ist nur von der Anzahl der Einsen im Argument, nicht aber von deren Position abhängig.

Abgabetermin: zu Beginn der Vorlesung am 03.07.2006