

7. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Komplexitätstheorie“

Aufgabe 31: 10 Punkte

Entwirf eine Schaltkreisfamilie für jede der folgenden Sprachen, so dass die Größe der Schaltkreise polynomiell in der Größe der Eingabe beschränkt ist und die Tiefe logarithmisch:

- (a) $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$;
- (b) $L_2 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0\}$
- (c) $L_3 = \{(01)^n \mid n \geq 0\} \cup \{(10)^n \mid n \geq 0\}$

Aufgabe 32: 10 Punkte

Das *Erfüllbarkeitsproblem für Schaltkreise* (*Circuit SAT*, *CSAT*) ist

$$\text{CSAT} := \{C \mid C \text{ Schaltkreis, der für mindestens eine Eingabe den Ausgabewert 1 liefert}\}.$$

Zeige, dass CSAT NP-hart ist, ohne die NP-Härte eines anderen Problems wie SAT oder 3SAT zu verwenden. Verwende dazu die Definition von NP (also polynomielle Beweissysteme) und die Schaltkreise, die im Beweis des Theorems auf Folie 10 in Kapitel 5 (“jedes $L \in P$ hat polynomielle Schaltkreiskomplexität”) konstruiert wurden.

Zeige danach, dass $\text{CSAT} \leq_p \text{SAT}$. Wir haben also einen alternativen NP-Härte-Beweis für SAT gefunden.

Aufgabe 33: 10 Punkte

Eine *Linearzeitreduktion* ist eine Reduktion, die in Zeit $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann. *P-Härte und P-Vollständigkeit bezüglich Linearzeitreduktionen* sind dann in der offensichtlichen Weise definiert (LogSpace-Reduktionen werden ausgetauscht durch Linearzeit-Reduktionen). Verwende das Hierarchietheorem, um zu zeigen, dass es keine P-vollständigen Probleme bezüglich Linearzeitreduktionen gibt.

Aufgabe 34: 10 Punkte (Zusatzaufgabe)

Linear programming (*LP*) ist das Problem, zu entscheiden, ob ein System linearer Ungleichungen der Form

$$c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n = c \text{ und } c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n \leq c$$

eine Lösung in den rationalen Zahlen hat. Zeige durch Reduktion von CVP, dass LP P-hart ist.

Hinweis: Gehe ähnlich vor wie beim Beweis der NP-Härte von Integer Programming. In LP kann man im allgemeinen nicht durch Gleichungen sicherstellen, dass eine numerische Variable nur den Wert 0 oder 1 hat! Das ist jedoch auch nicht notwendig: entwerfe die Gleichungen so, dass alle numerischen Variablen den Wert 0 oder 1 annehmen müssen *weil alle Eingaben entweder 0 oder 1 als Wert haben*.