Dr. Stefan Göller Sommersemester 2010

Graphentheorie

Übungsblatt 4

Abgabe: 9.6.10 vor der Übung *Besprechung: 9.6.10*

---

1. (25%) Ein *kreisartig planarer Graph* ist ein planarer Graph, bei dem alle Knoten auf der äusseren Facette liegen. Zeigen Sie:

- Kreisartig planare Graphen mit mindestens 4 Knoten besitzen zwei nicht benachbarte Knoten x, y mit $d(x), d(y) \leq 2$.Insbesondere sind kreisartig planare Graphen 3-färbbar.
- Bei kreisartig planaren Graphen gilt $e \leq 2n - 3$.
- Ein Graph G ist genau dann kreisartig planar, wenn G weder eine Unterteilung des $K_{2,3}$ noch des K_4 enthält.
  Hinweis: Betrachten Sie $G * K_1$.

2. (25%) Der *Mycielski-Graph* $M(G) = (V', E')$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist definiert durch $V' = V \uplus \{y_1, \ldots, y_n, z\}$ und $E' = E \cup \{(x_i, y_j) | (x_i, x_j) \in E\} \cup \{(y_j, z) \mid 1 \leq j \leq n\}$. Zeigen Sie:

- Wenn G dreiecksfrei ist, dann ist auch $M(G)$ dreiecksfrei.
- Für die Färbungszahl von $M(G)$ gilt $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$.

3. (25%) Im Folgenden sei $G = (V \uplus W, E)$ ein bipartiter Graph mit $E \subseteq V \times W$. Zeigen Sie:

- Es existiert ein planarer bipartiter Graph G mit Grad $d(x) = 3$ für alle $x \in V$ und $d(x) = 5$ für alle $x \in W$.
- Es existiert kein planarer bipartiter Graph G mit Grad $d(x) = 3$ für alle $x \in V$ und $d(x) = 5$ für alle $x \in W$, bei dem alle Knoten aus W an mindestens einer Facette der Länge 6 liegen.

4. (25%) Zeigen Sie, dass zur Liste L der Farben $\{1, 2, 3, 4\}$ im unten abgebildeten Graphen (auf der linken Seite) mit 17 Knoten keine L-Listenfärbung existiert. Konstruieren Sie daraus einen planaren Graphen mit 69 Knoten, der nicht 4-listenfärbbar ist (auf der rechten Seite finden Sie einen kleinen Hinweis, wie Sie einen solchen Graphen mit nur 63 Knoten konstruieren können).