Prof. Carsten Lutz/Dr. Stefan Göller SS 2013

Theoretische Informatik 2

Gewertete Aufgaben, Blatt 6

Besprechung: KW 27

---

1. (20%=2×10%) Begründen Sie kurz, warum die folgenden Probleme in NP sind. Argumentieren Sie dabei analog wie zum Beweis aus der Vorlesung, dass SAT in NP ist. In beiden Aufgabenteilen wird angenommen, dass natürliche Zahlen binär kodiert sind. Sie dürfen verwenden, dass Addition, Multiplikation und Teilbarkeitstest natürlicher Zahlen in polynomieller Zeit ausgeführt werden können.

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$

b) $B = \{a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{N} \mid \exists J \subseteq \{1, \ldots, n\} : b = \sum_{j \in J} a_j\}$

2. (30%=2×15%) Weisen Sie die NP-Vollständigkeit folgender Probleme nach. Reduzieren Sie beim Beweis der NP-Härte jeweils von CLIQUE.

a) Das Problem $\mathsf{TEILGRAPH\text{-}ISOMORPHIE}$ ist wie folgt gegeben.

Gegeben: Zwei ungerichtete Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$.

Frage: Ist G isomorph zu einem Teilgraphen von G', d.h. gibt es eine Teilmenge $U' \subseteq V'$, so dass G und $(U', \{\{u, v\} \mid u, v \in U', \{u, v\} \in E'\})$ dieselben Graphen beschreiben bis auf Umbenennung der Knoten?

b) Das Problem $\mathsf{UNABHÄNGIGE\text{-}MENGE}$ ist wie folgt gegeben.

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Hat G eine unabhängige Menge U der Größe k, d.h. $U \subseteq V$, $|U| = k$ und es gilt $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in U$?

3. (30%=3×10%) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen, wobei $L, L', L'' \subseteq \Sigma^*$ jeweils beliebige Sprachen sind:

a) Wenn $L \leq_p L' \leq_p L''$, dann $L \leq_p L''$.

b) Wenn $L \in \mathsf{NP}$ und für alle Sprachen $U \in \mathsf{PSpace}$ gilt $U \leq_p L$, dann $\mathsf{NP} = \mathsf{PSpace}$.

c) $L \in \mathsf{P}$ genau dann dann, wenn $L \leq_p \{a\}^*$.

4. (20%) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, d.h. V ist eine Menge von *Knoten* und $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ ist eine Menge von *Kanten*. Eine Menge $U \subseteq V$ von Knoten heißt *Knotenüberdeckung*, wenn jede Kante aus E mindestens einen Endpunkt in U hat (d.h. für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $\{u, v\} \cap E \neq \emptyset$).

Zeigen Sie, dass das folgende Problem $\mathsf{KNOTEN\ddot{U}BERDECKUNG}$ NP-hart ist:

$\{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ungerichteter Graph und hat eine Knotenüberdeckung der Größe $\leqslant k\}$

Hinweis: Reduzieren Sie dazu CLIQUE auf $\mathsf{KNOTEN\ddot{U}BERDECKUNG}$. Untersuchen Sie zuerst den Zusammenhang zwischen einer Clique im Graphen $G = (V, E)$ und einer Knotenüberdeckung im Komplementärgraphen $\overline{G} = (V,\ \binom{V}{2} \setminus E)$.