

## Theoretische Informatik 2

### Ungewertete Aufgaben, Blatt 3

*Besprechung: In Ihrer Übung in KW 20*

---

1. Für diese Aufgabe dürfen die in der Vorlesung eingeführten Konstrukte und LOOP-berechenbaren Funktionen dürfen verwendet werden. Man gebe für folgende Funktionen  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  jeweils **LOOP**-Programme an, die  $f$  berechnen:

- a)  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $(x, y) \mapsto x \div y$ .
- b)  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ .
- c)  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $(x, y) \mapsto \text{ggT}(x, y)$ .

2. Die Ackermannfunktion  $A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  ist folgendermaßen definiert:

- $A(0, y) = y + 1$ ,
- $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$  und
- $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$ .

Geben Sie für jedes  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  eine Funktion  $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  an mit  $f_i(n) = A(i, n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Machen Sie sich das Wachstum für  $i = 4$  klar.

3. *GOTO-Programme* bestehen aus Sequenzen von *Anweisungen*  $A_i$ , die jeweils durch eine *Marke*  $M_i$  eingeleitet werden, also Sequenzen der Art

$$M_1 : A_1; M_2 : A_2; \dots; M_k : A_k,$$

wobei mögliche Anweisungen  $A_i$  einer der folgenden Gestalt sind:

- *Wertzuweisung, Addition*:  $x_i := x_j + c$  für  $c \in \mathbb{N}$
- *Wertzuweisung, Subtraktion*:  $x_i := x_j - c$  für  $c \in \mathbb{N}$
- *Unbedingter Sprung*: GOTO  $M_i$
- *Bedingter Sprung*: IF  $x_i = x$  THEN GOTO  $M_i$
- *Stopanweisung*: HALT

Wir nennen eine Funktion *GOTO-berechenbar*, wenn es ein GOTO-Programm gibt, die diese Funktion berechnet.

Zeigen Sie, dass

- a) jede WHILE-berechenbare Funktion GOTO-berechenbar ist und dass
- b) jede GOTO-berechenbare Funktion WHILE-berechenbar ist.

4. Sie dürfen für diese Aufgabe die in der Vorlesung als primitiv rekursiv nachgewiesenen Funktionen benutzen. Zeigen Sie von den folgenden Funktionen, dass sie primitiv rekursiv sind:

a)  $\exp : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\exp(x) = 2^x$ .

b)  $\text{sgn} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

c)  $\text{pred} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\text{pred}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

d)  $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $c(x, y) = 2^x \cdot (2y + 1) - 1$