Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: ABoxen und Anfragebeantwortung
- Kapitel 7: Effiziente Beschreibungslogiken

Kapitel 5

Komplexität

Ziel des Kapitels

Automatisches Schlussfolgern spielt zentrale Rolle für BLen:

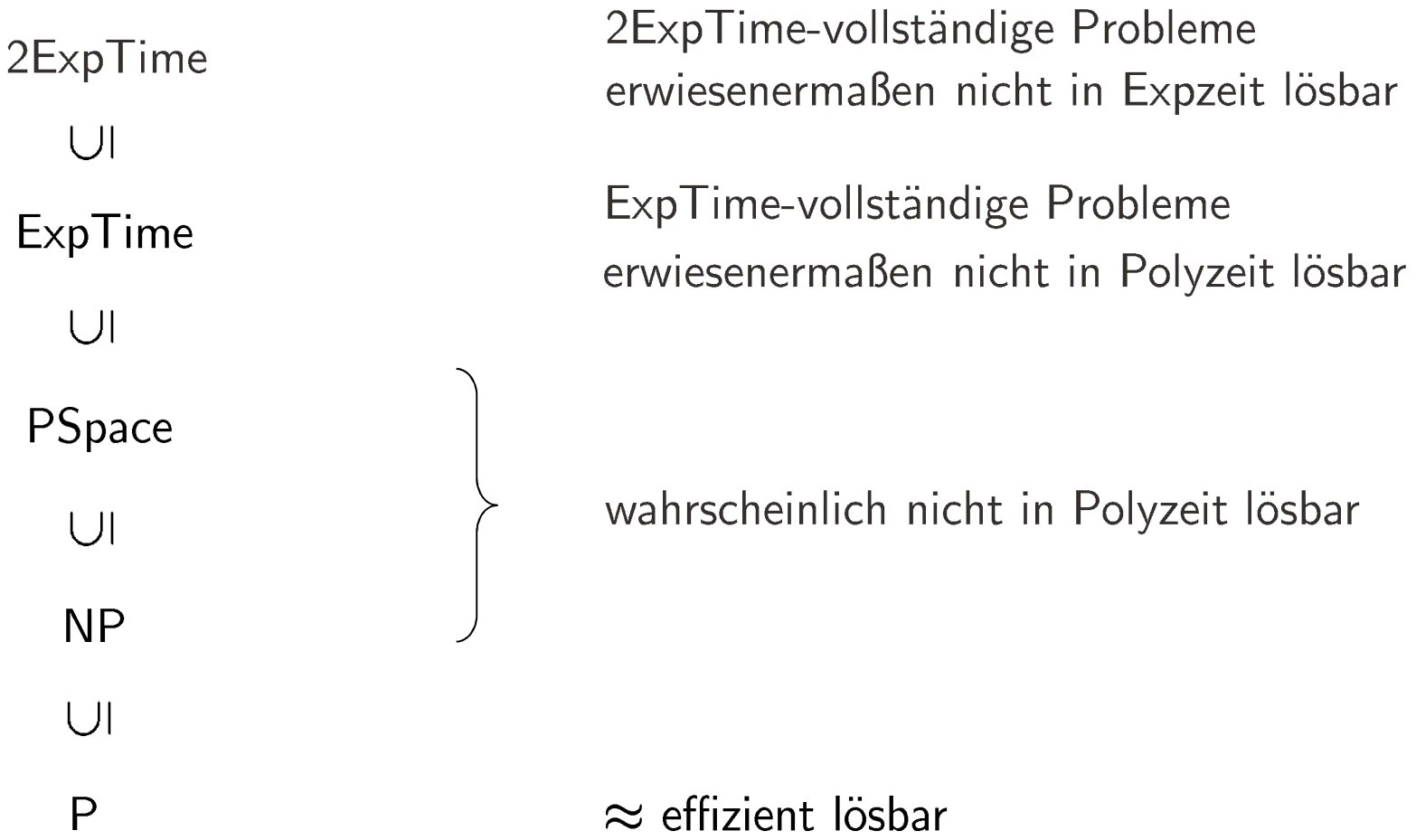
- ermöglicht die Entwicklung intelligenter Anwendungen
- die Ausdrucksstärke von BLen ist stark darauf zugeschnitten

Wichtig für automatisches Schlussfolgern:

1. Entscheidbarkeit der relevanten Schlussfolgerungsprobleme
2. möglichst geringe Komplexität
3. Algorithmen, die sich in der Praxis performant verhalten

Dieses Kapitel: 2

Zur Erinnerung



Für alle Klassen ist Härte mittels Polyzeitreduktionen definiert.

Komplexität

Komplexität mit TBoxen,
obere Schranke

Obere Schranke

Wir wollen zeigen:

Theorem 5.1. In $\mathcal{ALC}$ ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

Mit Lemma 2.8: Subsumtion und Äquivalenz ExpTime-vollständig.

Wir beginnen mit oberer Schranke (Enthaltensein in ExpTime):

- wir verwenden ein Verfahren aus der Modallogik: Typelimination [Pratt78]
- basiert auf *syntaktischem* Typ-Begriff

Syntaktische Typen

Wir nehmen an, dass

- das Eingabe-Konzept C_0 in NNF ist
- die Eingabe-TBox die Form $\{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$ hat mit $C_{\mathcal{T}}$ in NNF.

Definition 5.2. (Typ)
Ein *Typ* für C_0 und $\mathcal{T}$ ist Teilmenge $t \subseteq \mathsf{sub}(C_0, \mathcal{T})$ so dass

1. $A \in t$ gdw. $\neg A \notin t$; für alle $\neg A \in \mathsf{sub}(C_0, \mathcal{T})$;
2. $C \sqcap D \in t$ gdw. $C \in t$ und $D \in t$ für alle $C \sqcap D \in \mathsf{sub}(C_0, \mathcal{T})$;
3. $C \sqcup D \in t$ gdw. $C \in t$ oder $D \in t$ für alle $C \sqcup D \in \mathsf{sub}(C_0, \mathcal{T})$;
4. $C_{\mathcal{T}} \in t$;

T5.1

Typelimination

Generelle Idee der Typelimination bei Eingabe C_0, $\mathcal{T}$:

- generiere alle Typen für C_0 und $\mathcal{T}$ (exponentiell viele)
- eliminiere wiederholt Typen, die in keinem Modell von $\mathcal{T}$ vorkommen können
- überprüfe, ob ein Typ überlebt hat, der C_0 enthält
- antworte "erfüllbar", wenn dem so ist, sonst "unerfüllbar"

Schlechte Typen

Formalisierung von "Typen, die in keinem Modell vorkommen können"

Definition 5.3. (schlecht)
Sei Γ Typenmenge und $t \in \Gamma$.
Dann ist t *schlecht in* Γ wenn für ein $\exists r.C \in t$ gilt:

es gibt kein $t' \in \Gamma$ mit $\{C\} \cup \{D \mid \forall r.D \in t\} \subseteq t'$.

Intuitiv: Typ ist schlecht wenn er eine existentielle Restriktion enthält,
für die es keinen "Zeugen" gibt.

T5.1 cont

Typelimination

define procedure $\mathcal{ALC}$-Elim$(C_0, \mathcal{T})$
  berechne Γ_0: Menge aller Typen für C_0 und $\mathcal{T}$
  $i := 0$
  repeat
    $i := i + 1$
    $\Gamma_i := \{t \in \Gamma_{i-1} \mid t$ nicht schlecht in $\Gamma_{i-1}\}$
  until $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}$
  if es gibt $t \in \Gamma_i$ mit $C_0 \in t$ **then**
    return "erfüllbar"
  else return "unerfüllbar"

T5.1 cont

Terminierung und Korrektheit

Proposition 5.4.
$\mathcal{ALC}$-Elim$(C_0, \mathcal{T})$ terminiert nach $2^{\mathcal{O}(|C_0|+|\mathcal{T}|)}$ Schritten. T5.2

Proposition 5.5.
$\mathcal{ALC}$-Elim$(C_0, \mathcal{T})$ antwortet "erfüllbar" gdw C_0 erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$. T5.3

Theorem 5.6.
In $\mathcal{ALC}$ ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. TBoxen entscheidbar in ExpTime.

Zusammenhang mit Tableau-Algorithmen

Offensichtliche Entsprechungen:

- $\sqcap$-Regel, $\sqcup$-Regel, TBox-Regel finden sich wieder
  in der Definition eines Typs;
- $\exists$-Regel und $\forall$-Regel finden sich wieder in Def. von "schlecht"
- Freiheit von offensichtlichen Widersprüchen findet sich wieder
  in der Definition eines Typs;

Unterschiede:

- Tableau-Algorithmus benötigt im Worst Case dreifach exponentielle Laufzeit
- Typelimination benötigt im Best Case exponentielle Laufzeit

Komplexität

Komplexität mit TBoxen,
untere Schranke

Untere Schranke

Standard-Ansatz zum Beweis von ExpTime-Härte:

> Reduktion des Wortproblems für polynomiell platzbeschränkte, alternierende Turing Maschinen.

Wir reduzieren stattdessen ein spieltheoretisches Problem

(mit obigem verwandt, aber intuitiver)

ExpTime Spiele

- Zwei Spieler spielen auf gegebener aussagenlogischer Formel φ
- Jede Variable in φ gehört entweder Spieler 1 oder Spieler 2
- Das Spiel beginnt auf einer gegebenen Anfangsbelegung π_0 der Variablen
- Spieler 1 beginnt, die Spieler wechseln sich ab
- In jedem Zug ändert Spieler Wahrheitswert einer seiner Variablen;
  es ist erlaubt, zu passen
- Spieler 1 gewinnt wenn φ jemals wahr wird
  (egal, welcher Spieler gezogen hat)
- Spieler 2 gewinnt, wenn das Spiel unendlich weitergeht
  ohne dass φ wahr wird

T5.4

ExpTime Spiele

Definition 5.7.

- *Spiel*: Tupel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$
  Γ_1, Γ_2 Partitionierung der Variablen in φ, π_0 Anfangsbelegung
- *Konfiguration*: Paar (i, π) mit $i \in \{1, 2\}$ aktiver Spieler und π Belegung
- π ist j-*Variation* von π' ($j \in \{1, 2\}$) wenn $\pi = \pi'$ oder
  π und π' unterscheiden sich nur in einer Variablen $p \in \Gamma_j$

π j-Variation von π': Spieler j kann π in π' transformieren.

Das hier relevante Entscheidungsproblem bezieht sich auf

Gewinnstrategien für Spieler 2.

Gewinnstrategie

Intuitiv:

- eine Gewinnstrategie sagt Spieler 2 nach jedem möglichen Spielverlauf wie er spielen muss um zu gewinnen.

- wenn Spieler 2 eine Gewinnstrategie hat, so kann er das Spiel gewinnen

Gewinnstrategie

Definition 5.8. (Gewinnstrategie)
Gewinnstrategie für Spieler 2 in Spiel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$ ist unendlicher knotenbeschrifteter Baum (V, E, ℓ), wobei ℓ jedem Knoten $v \in V$ Konfiguration $\ell(v)$ zuweist so dass

(a) Wurzel beschriftet mit $(1, \pi_0)$;

(b) wenn $\ell(v) = (2, \pi)$, dann hat v Nachfolger v' mit $\ell(v') = (1, \pi')$, wobei π' 2-Variation von π;

(c) wenn $\ell(v) = (1, \pi)$, dann hat v Nachfolger $v_0, \ldots, v_{|\Gamma_1|}$ mit $\ell(v_i) = (2, \pi_i)$ wobei $\pi_0, \ldots, \pi_{|\Gamma_1|}$ alle existierenden 1-Variationen von π;

(d) wenn $\ell(v) = (i, \pi)$, dann $\pi \not\models \varphi$

T5.5

ExpTime Spiele

Definition 5.9.
$Spiel_1$ ist das folgende Problem: gegeben Spiel $(\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$, entscheide ob Spieler 2 eine Gewinnstrategie hat.

Theorem 5.10.
Spiel_1 ist ExpTime-vollständig.

ExpTime-Härte von Erfüllbarkeit in $\mathcal{ALC}$ bzgl. TBoxen:

Beweis per Reduktion von Spiel_1

ExpTime-Härte

Gegeben Spiel $S = (\varphi, \Gamma_1, \Gamma_2, \pi_0)$, konstruiere (in Polynomialzeit) Konzept C_S und TBox $\mathcal{T}_S$ so dass:

> Spieler 2 hat Gewinnstrategie in S gdw. C_S erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}_S$.

Idee:

(Baum)-Modelle von C_S und $\mathcal{T}_S$ kodieren Gewinnstrategien

ExpTime-Härte

Sei $\Gamma_1 = \{p_0, \ldots, p_{m-1}\}$ und $\Gamma_2 = \{p_m, \ldots, p_{n-1}\}$

Signatur von C_S und $\mathcal{T}_S$:

- Rollenname r für Kanten im Baum
- Konzeptname W für die Wurzel
- Konzeptnamen $P_0, \ldots, P_{n-1}$ für die Variablen
- Konzeptnamen S_1, S_2 für aktiven Spieler
- Konzeptnamen $V_0, \ldots, V_{n-1}$ für Variable, deren Wert zum Erreichen der aktuellen Konfiguration geändert wurde.

ExpTime-Härte

1. Anfangskonfiguration ist korrekt:

$$\boldsymbol{W} \sqsubseteq \boldsymbol{S_1} \sqcap \bigsqcap_{i<n,\, \pi_0(p_i)=0} \neg \boldsymbol{P_i} \;\sqcap \bigsqcap_{i<n,\, \pi_0(p_i)=1} \boldsymbol{P_i}$$

2. Wenn Spieler 1 am Zug gibt es $\boldsymbol{m}+1$ Nachfolger:

$$\boldsymbol{S_1} \sqsubseteq \exists \boldsymbol{r}.(\neg \boldsymbol{V_0} \sqcap \cdots \sqcap \neg \boldsymbol{V_{n-1}}) \sqcap \bigsqcap_{i<m} \exists \boldsymbol{r}.\boldsymbol{V_i}$$

3. Wenn Spieler 2 am Zug, gibt es einen Nachfolger:

$$\boldsymbol{S_2} \sqsubseteq \exists \boldsymbol{r}.(\neg \boldsymbol{V_0} \sqcap \cdots \sqcap \neg \boldsymbol{V_{n-1}}) \sqcup \bigsqcup_{m\leq i<n} \exists \boldsymbol{r}.\boldsymbol{V_i}$$

4. Es ändert sich höchstens eine Variable pro Zug:

$$\top \sqsubseteq \bigsqcap_{i<j<n} \neg(\boldsymbol{V_i} \sqcap \boldsymbol{V_j})$$

ExpTime-Härte

5. Ausgewählte Variable ändern ihren Wahrheitswert:

$$\top \sqsubseteq \bigsqcap_{i<n} \big(\, (\, \boldsymbol{P_i} \rightarrow \forall \boldsymbol{r}.(\boldsymbol{V_i} \rightarrow \neg \boldsymbol{P_i}) \,) \sqcap (\, \neg \boldsymbol{P_i} \rightarrow \forall \boldsymbol{r}.(\boldsymbol{V_i} \rightarrow \boldsymbol{P_i}) \,) \, \big)$$

6. Alle anderen Variablen behalten ihren Wert:

$$\top \sqsubseteq \bigsqcap_{i<n} \big(\, (\, \boldsymbol{P_i} \rightarrow \forall \boldsymbol{r}.(\neg \boldsymbol{V_i} \rightarrow \boldsymbol{P_i}) \,) \sqcap (\, \neg \boldsymbol{P_i} \rightarrow \forall \boldsymbol{r}.(\neg \boldsymbol{V_i} \rightarrow \neg \boldsymbol{P_i}) \,) \, \big)$$

7. Die Spieler wechseln sich ab:

$$\boldsymbol{S_1} \sqsubseteq \forall \boldsymbol{r}.\boldsymbol{S_2}, \quad \boldsymbol{S_2} \sqsubseteq \forall \boldsymbol{r}.\boldsymbol{S_1}, \quad \boldsymbol{S_1} \sqsubseteq \neg \boldsymbol{S_2}$$

8. Die Formel φ ist immer falsch:

$$\top \sqsubseteq \neg \varphi$$

Korrektheit

Setze $C_S = W$.

Lemma 5.11.
Spieler 2 hat Gewinnstrategie in S gdw. C_S erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}_S$.

T5.6

Theorem 5.12.
In $\mathcal{ALC}$ ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. TBoxen ExpTime-hart.

Zusammen mit Theorem 5.6: ExpTime-Vollständigkeit (Theorem 5.1)

Komplexität

Komplexität ohne TBoxen
obere Schranke

Obere Schranke

Wir wollen zeigen:

Theorem 5.13. In $\mathcal{ALC}$ ist die Erfüllbarkeit von Konzepten (ohne TBoxen) PSPACE-vollständig.

Mit Lemma 2.8: Subsumtion und Äquivalenz PSPACE-vollständig.

Wir beginnen mit oberer Schranke (Enthaltensein in PSPACE),

benutzen ein Verfahren aus der Modallogik: K-Worlds

Baummodelle

Zur Erinnerung:

- Wenn C erfüllbar, dann hat C Baummodell (Theorem 3.4)
- mit TBox $\mathcal{T}$ kann es sein, dass alle Baummodelle unendlich sind:

  A erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.A\}$

- ohne TBox gibt es stets ein Baummodell, dessen Tiefe durch $|C|$ beschränkt ist

Es genügt, die Existenz solcher Modelle zu überprüfen.

ALC-Worlds

In PSpace:

- ein linear tiefer Baum ist exponentiell gross
- gesamtes Modell im Speicher: nicht PSPACE
- stattdessen: prüfe Existenz des Baumes mittels Depth-first Traversal, halte zu jeder Zeit nur einen Pfad des Baumes im Speicher

Wir entwickeln nicht-deterministischen Algorithmus, verwenden

Theorem 5.14. (Savitch)
PSPACE = NPSPACE.

ALC-Worlds

Wir nehmen an, dass Eingabe C_0 in NNF.

Wir verwenden wieder Typen, definieren diese jedoch differenzierter.

Zur Erinnerung:

Rollentiefe $\mathsf{rd}(C)$ von Konzepten $C \in \mathsf{sub}(C_0)$ induktiv definiert:

- $\mathsf{rd}(A) = \mathsf{rd}(\neg A) = 0$;
- $\mathsf{rd}(C \sqcap D) = \mathsf{rd}(C \sqcup D) = \max(\mathsf{rd}(C), \mathsf{rd}(D))$;
- $\mathsf{rd}(\exists r.C) = \mathsf{rd}(\forall r.C) = 1 + \mathsf{rd}(C)$.

Lemma 4.9. Für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C gilt $\mathsf{rd}(C) \leq |C|$.

ALC-Worlds

Definition 5.15. (i-Konzepte)
Für $i \geq 0$ ist die Menge der i-*Konzepte* definiert als:

$$\mathsf{sub}_i(C_0) := \{C \in \mathsf{sub}(C_0) \mid \mathsf{rd}(C) \leq i\}.$$

Definition 5.16 (i-Typ)
Sei $i \geq 0$. i-*Typ* für C_0 ist Teilmenge $t \subseteq \mathsf{sub}_i(C_0)$ so dass

1. $A \in t$ gdw. $\neg A \notin t$ — für alle $\neg A \in \mathsf{sub}_i(C_0)$;
2. $C \sqcap D \in t$ gdw. $C \in t$ und $D \in t$ — für alle $C \sqcap D \in \mathsf{sub}_i(C_0)$;
3. $C \sqcup D \in t$ gdw. $C \in t$ oder $D \in t$ — für alle $C \sqcup D \in \mathsf{sub}_i(C_0)$;

T5.7

ALC-Worlds

define procedure $\mathcal{ALC}$-Worlds(C_0)
  $i := \mathrm{rd}(C_0)$
  rate $t \subseteq \mathrm{sub}_i(C_0)$ mit $C_0 \in t$
  recurse(t, i, C_0)

define procedure recurse(t, i, C_0)
  if t kein i-Typ für C_0 **then**
    return false
  for all $\exists r.C \in t$ **do**
    $S := \{C\} \cup \{D \mid \forall r.D \in t\}$
    rate $t' \subseteq \mathrm{sub}_{i-1}(C_0)$ mit $S \subseteq t'$
    if recurse($t', i-1, C_0$) = false **then**
      return false
  return true

T5.7 cont

Terminierung und Korrektheit

Proposition 5.17.
$\mathcal{ALC}$-Worlds(C_0) terminiert und benötigt polynomiellen Platz (in $|C_0|$).

T5.8

Proposition 5.18.
$\mathcal{ALC}$-Worlds(C_0)=true gdw C_0 erfüllbar. T5.9

Theorem 5.19.
In $\mathcal{ALC}$ ist die Erfüllbarkeit von Konzepten in PSPACE.

Zusammenhang mit Tableau-Algorithmen

Offensichtliche Entsprechungen:

- $\sqcap$-Regel und $\sqcup$-Regel finden sich wieder in Definition von $\boldsymbol{i}$-Typ;
- $\exists$-Regel und $\forall$-Regel finden sich wieder in rekursivem Aufruf
- Freiheit von offensichtlichen Widersprüchen findet sich wieder in der Definition eines $\boldsymbol{i}$-Typs;
- Korrektheitsbeweise sehr ähnlich.

Unterschiede:

- Tableau-Algorithmus ist deterministisch, hat dafür "teure" $\sqcup$-Regel;
- Tableau-Algorithmus ist nicht platzoptimiert.

Erweiterungen von ALC

Bemerkungen:

- $\mathcal{ALC}$-Worlds kann auf azyklische TBoxen erweitert werden (andere Definition von Rollentiefe benötigt)
- Erfüllbarkeit in $\mathcal{ALC}$ bzgl. azyklischer TBoxen also auch in PSPACE
- $\mathcal{ALC}$-Worlds kann auf $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCQ}$, $\mathcal{ALCQI}$ erweitert werden
- auch in diesen Logiken ist Erfüllbarkeit bzgl. azyklischer/leerer TBoxen also in PSPACE

Komplexität

Komplexität ohne TBoxen
untere Schranke

Untere Schranke

Standard-Ansatz zum Beweis von PSPACE-Härte:

Reduktion des Gültigkeitsproblems für QBFs

(quantifizierte Bool'sche Formeln)

Wir reduzieren stattdessen wieder ein spieltheoretisches Problem

(mit obigem verwandt, aber intuitiver)

PSpace Spiele

- Zwei Spieler spielen auf gegebener aussagenlogischer Formel φ
- Jede Variable in φ gehört entweder Spieler 1 oder Spieler 2
- Jedem Spieler gehören gleich viele Variablen
- Die Variablen der Spieler sind linear geordnet
- Spieler 1 beginnt, die Spieler wechseln sich ab
- In jedem Zug wählt Spieler Wahrheitswert seiner nächsten Variablen
- Spieler 1 gewinnt wenn φ am Ende wahr ist, sonst gewinnt Spieler 2

T5.10

PSpace Spiele

Unterschiede zu ExpTime-Spielen:

- Das Spiel endet immer, die Anzahl der Schritte ist vorbestimmt
- Der Spieler hat keine Freiheit in der Wahl seiner Variablen
- Jede Variable bekommt nur einmal einen Wahrheitswert zugewiesen
- Man darf nicht passen
- Es wird keine Anfangsbelegung benötigt.

PSpace Spiele

Definition 5.20.

- *Spiel*: Propositionale Formel φ mit Variablen $p_1, \ldots, p_n$,
  n geradzahlig
- *Konfiguration*: Wort $\pi \in \{0,1\}^*$

Intuition:

- Variablen p_i mit i ungerade gehören Spieler 1, die anderen Spieler 2
- Konfiguration w ist partielle Wertzuweisung:

  i-tes Symbol in w ist Wert von p_i

Das hier relevante Entscheidungsproblem bezieht sich auf

Gewinnstrategien für Spieler 1.

Gewinnstrategie

Definition 5.21. (Gewinnstrategie)
Gewinnstrategie für Spieler 1 in Spiel φ ist endlicher knotenbeschrifteter Baum (V, E, ℓ), wobei ℓ jedem Knoten $v \in V$ Konfiguration $\ell(v)$ zuweist so dass

(a) Wurzel beschriftet mit ε (leere Konfiguration);

(b) wenn $\ell(v) = w$ mit $|w|$ gerade (also Spieler 1 am Zug),
dann hat v Nachfolger v' mit $\ell(v') \in \{w0, w1\}$;

(c) wenn $\ell(v) = w$ mit $|w|$ ungerade und $|w| < n$ (also Spieler 2 am Zug),
dann hat v Nachfolger v' und v'' mit $\ell(v') = w0$ und $\ell(v'') = w1$;

(d) wenn $\ell(v) = w$ mit $|w| = n$, dann $w \models \varphi$

T5.11

PSpace Spiele

Definition 5.22.
Spiel_2 ist das folgende Problem: gegeben Spiel φ, entscheide ob Spieler 1 eine Gewinnstrategie hat.

Theorem 5.23.
Spiel_2 ist PSPACE-vollständig.

PSPACE-Härte von Erfüllbarkeit in $\mathcal{ALC}$ bzgl. leeren TBoxen:

Beweis per Reduktion von Spiel_2

PSpace-Härte

Gegeben Spiel φ, konstruiere (in Polynomialzeit) Konzept C_φ so dass

Spieler 1 hat Gewinnstrategie in φ gdw. C_φ erfüllbar.

Idee:

(Baum)-Modelle von C_φ kodieren Gewinnstrategien

PSpace-Härte

Die Variablen in φ seien $p_1, \ldots, p_n$, n geradzahlig

Signatur von C_φ:

- Rollenname r für Kanten im Baum
- Konzeptnamen $P_1, \ldots, P_n$ für die Wahrheitswerte der Variablen in partiellen Wertzuweisungen

Wir schreiben $\forall r^i.C$ für $\underbrace{\forall r. \cdots \forall r}_{i \text{ mal}}.C$

C_φ ist Konjunktion mit Konjunkten wie folgt.

PSpace-Härte

1. $|w|$ gerade gdw. Spieler 1 am Zug gdw. Knoten auf Tiefe i, i gerade
   Dann gibt es einen Nachfolger, der Wert für P_{i+1} auswählt

$$C_1 := \bigsqcap_{i \in \{0,2,\ldots,n-2\}} \forall r^i.(\exists r.\neg P_{i+1} \sqcup \exists r.P_{i+1})$$

2. $|w|$ ungerade gdw. Spieler 2 am Zug gdw. Knoten auf Tiefe i, i ungerade
   Dann gibt zwei Nachfolger für beide Werte von P_{i+1}

$$C_2 := \bigsqcap_{i \in \{1,3,\ldots,n-1\}} \forall r^i.(\ \exists r.\neg P_{i+1} \sqcap \exists r.P_{i+1}\ )$$

PSpace-Härte

3. Einmal gewählte Wahrheitswerte bleiben erhalten:

$$C_3 := \bigsqcap_{1 \leq i \leq j < n} \forall r^j.\big((P_i \rightarrow \forall r.P_i) \sqcap (\neg P_i \rightarrow \forall r.\neg P_i) \big)$$

4. An den Blättern ist φ wahr:

$$C_4 := \forall r^n.\varphi$$

Korrektheit

Setze $C_\varphi = C_1 \sqcap C_2 \sqcap C_3 \sqcap C_4$.

Lemma 5.24.
Spieler 1 hat Gewinnstrategie in φ gdw. C_φ erfüllbar.

Theorem 5.25.
In $\mathcal{ALC}$ ist die Erfüllbarkeit von Konzepten bzgl. leerer TBoxen PSPACE-hart.

Zusammen mit Theorem 5.19: PSPACE-Vollständigkeit (Theorem 5.13)

Kapitel 5

Komplexität

Zusammenfassung + Nachbemerkung

Zusammenfassung

- Erfüllbarkeit in $\mathcal{ALC}$ ExpTime-vollständig mit TBoxen
- Erfüllbarkeit in $\mathcal{ALC}$ PSpace-vollständig ohne TBoxen
- Dasselbe gilt für $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCQ}$, $\mathcal{ALCQI}$
- Baummodelle spielen in allen Fällen eine wichtige Rolle
- PSpace vs. ExpTime: polynomiell tiefe vs. unendliche Bäeume
- *Typen* sind wichtiger Begriff zum Entwickeln von Algorithmen