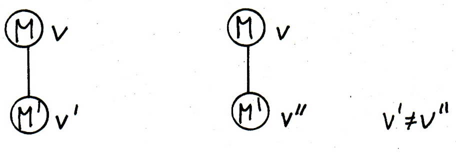
Bei Safra-Bäumen kommt es auf die Knotennamen an!

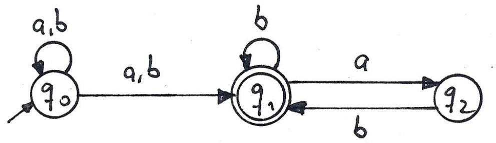
Vorlesung Automatentheorie, Sommersemester 2015, Universität Bremen

Am 16. 6. haben wir in der Übung diskutiert, ob sich zwei Safra-Bäume unterscheiden, wenn ihre Baumstruktur und Knoteninhalte übereinstimmen, aber die Knotennamen verschieden sind. Dürfen also in der Safra-Konstruktion die beiden Bäume



als identisch angesehen werden – oder würde das zu einem „Fehlverhalten" des konstruierten deterministischen Rabin-Automaten führen?

Eine solche Situation tritt in Anikas Beispiel auf. Betrachte dazu den folgenden NBA $\mathcal{A}$.



Die erkannte Sprache ist $L(\mathcal{A}) = \{\pi \in \{a,b\}^\omega \mid \#_{aa}(\pi) < \infty\}$. Wenn wir auf $\mathcal{A}$ die Safra-Konstruktion anwenden und dabei Bäume der obigen Gestalt als identisch ansehen, dann erhalten wir den deterministischen Rabin-Automaten $\mathcal{A}'$ in Abbildung 1.

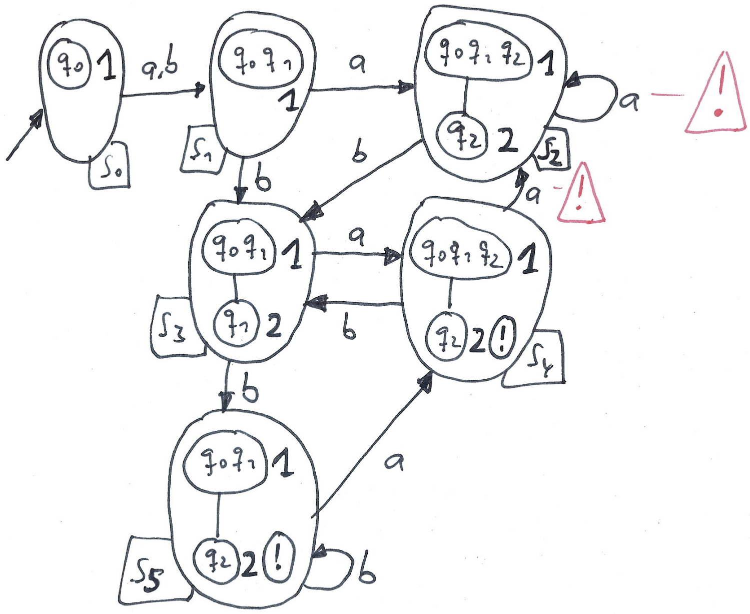
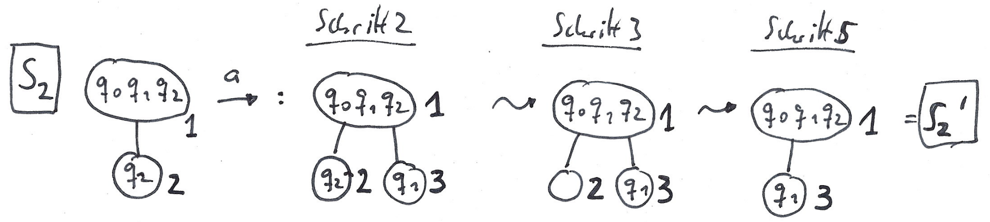
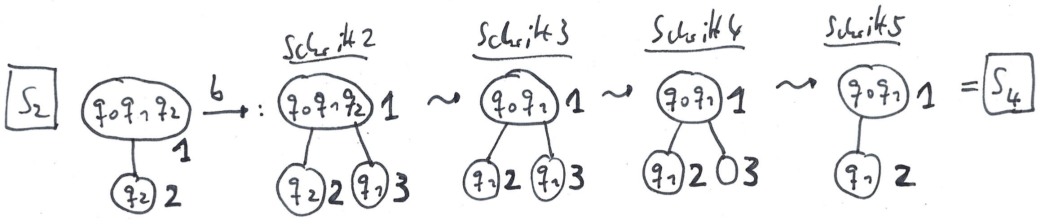


Abbildung 1: Rabin-Automat $\mathcal{A}'$ *mit* Identifizierung

Insbesondere erhalten wir den Nachfolgerbaum von S_2 mit einer a-Kante laut Safra-Konstruktion so:



Den resultierenden Baum S_2' sehen wir als identisch zu S_2 an; also verzichten wir auf S_2' und zeichnen stattdessen eine a-Kante von S_2 zu S_2 (obere Markierung ⚠ im Bild). Mit derselben Begründung führt eine a-Kante von S_4 zu S_2 (da S_4 dieselben Nachfolgerbäume hat wie S_2; siehe untere Markierung ⚠ im Bild). Beachte auch, dass die Konstruktion des b-Nachfolgers von S_4 ohne Schwierigkeiten verläuft:



Da die Safra-Bäume von $\mathcal{A}'$ zwei Knotennamen verwenden, hat die Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}'$ zwei Paare:

$$\mathcal{P} = \Big\{(\emptyset, \emptyset),\ (\{S_0, S_1\}, \{S_4, S_5\})\Big\}$$

Betrachten wir nun das Wort $\pi = (aab)^\omega$, dann ist der zugehörige Run $S_0S_1S_2S_3(S_4S_2S_3)^\omega$ von $\mathcal{A}'$ auf π gemäß dem zweiten Paar in $\mathcal{P}$ akzeptierend. Das Wort π gehört aber nicht zu $L_\omega(\mathcal{A})$!
Die Ursache für diesen „bad run“ ist genau die Identifizierung, die wir an den mit ⚠ markierten Stellen vorgenommen haben. Betrachten wir nämlich S_2' als eine separate Kopie von S_2, in der der Blattknoten die Nummer 3 hat, dann bekommen wir auch separate Kopien S_3', S_4', S_5' von S_3, S_4, S_5 mit demselben Unterschied. In einem akzeptierenden Run ist es nun nicht mehr möglich, unendlich oft zwischen den „alten“ und „neuen“ Kopien zu wechseln, weil durch die wechselnden Knotennamen die Akzeptanzbedingung verletzt wird, wie wir gleich sehen werden.
Es sollte noch festgestellt werden, dass es nicht notwendig ist, weitere Kopien S_2'' usw. von S_2' zu erzeugen: wenn man die oben abgebildete Konstruktion auf S_2' statt auf S_2 anwendet, kann man nämlich den Knotennamen 2 wiederverwenden und bekommt dadurch eine a-Kante von S_2' zurück nach S_2. Wir erhalten somit den deterministischen Rabin-Automaten $\mathcal{A}^d$ in Abbildung 2 mit den zusätzlichen Zuständen S_2', S_3', S_4', S_5'.
Da es in den Safra-Bäumen von $\mathcal{A}^d$ nun drei Knoten gibt, besteht die Akzeptanzkomponente von $\mathcal{A}^d$ auch aus drei Paaren:

$$\mathcal{P} = \Big\{(\emptyset, \emptyset),\ (\{S_0, S_1, S_2', S_3', S_4', S_5'\}, \{S_4, S_5\}),\ (\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}, \{S_4', S_5'\})\Big\}$$

Für diesen Automaten kann man nun argumentieren, dass er $L(\mathcal{A})$ erkennt: Wenn π von $L(\mathcal{A}^d)$ akzeptiert wird, dann nur gemäß des zweiten oder dritten Paars in $\mathcal{P}$ (das erste Paar

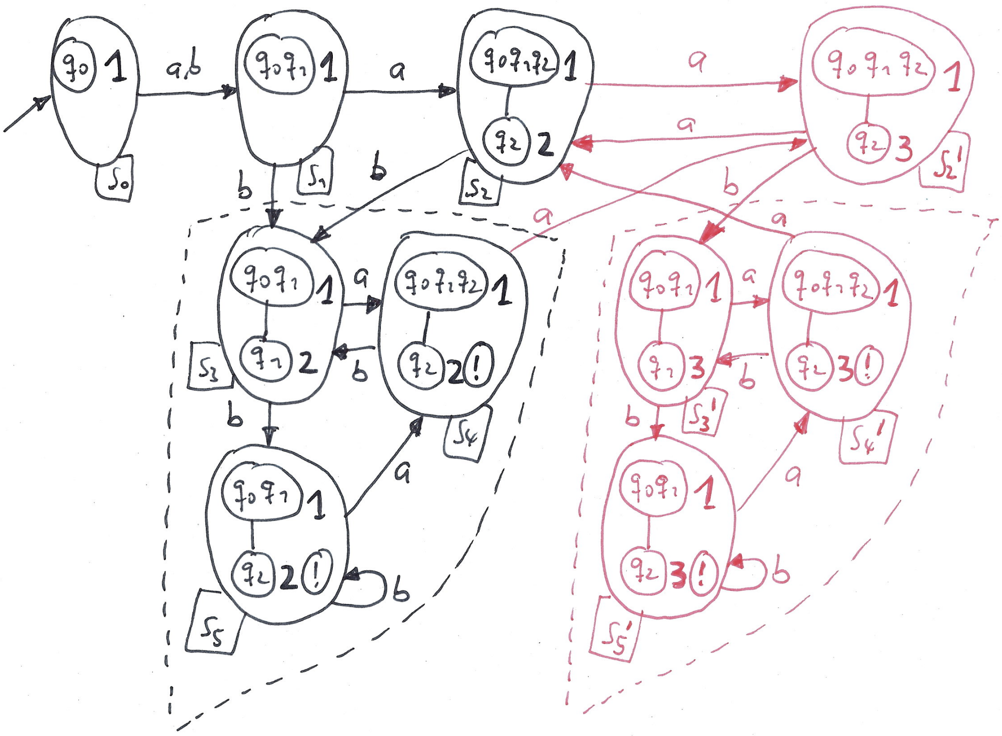


Abbildung 2: Rabin-Automat $\mathcal{A}'$ *ohne* Identifizierung

trägt wegen $\emptyset$ rechts nicht zum Akzeptieren bei). Das zweite Paare besagt aber, dass $\mathcal{A}^d$ nach endlich vielen Schritten dauerhaft im Dreieck S_3, S_4, S_5 verbleiben muss, denn S_2' darf auf einem akzeptierenden Run nur endlich oft auftreten. Analog besagt das dritte Paar, dass $\mathcal{A}^d$ nach endlich vielen Schritten dauerhaft im Dreieck S_3', S_4', S_5' verbleiben muss. In jedem dieser Dreiecke muss aber auf jedes a ein b folgen. Also hat π nur endlich viele Teilwörter aa. Umgekehrt wird jedes ω-Wort mit endlich vielen Teilwörtern aa von $\mathcal{A}^d$ erkannt: überlege Dir selbst, warum. ☺

Fazit. Beim Erzeugen neuer Kinder in Schritt 2 der Safra-Konstruktion muss man einen Knotennamen wählen, der bisher noch nicht im vorliegenden Safra-Baum vorkommt. Man hat oft die Möglichkeit, den Namen so zu wählen, dass am Ende von Schritt 6 ein Safra-Baum herauskommt, der bereits im Automaten vorkommt. Das ist jedoch nicht immer möglich, und manchmal erhält man einen Safra-Baum, der zu einem bereits vorkommenden Safra-Baum bis auf die Knotennamen identisch ist. In einem solchen Fall bilden die beiden Safra-Bäume *verschiedene* Zustände des zu konstruierenden Automaten. Man darf insbesondere in den Schritten 3–6 und danach die Knotennamen *nicht* verändern.