

Theoretische Informatik 2

Blatt 5 (Ungewertete Aufgaben)

Besprechung: In Ihrer Übung in KW 21

1. Für diese Aufgabe dürfen die in der Vorlesung eingeführten Konstrukte und LOOP-berechenbaren Funktionen verwendet werden. Man gebe für folgende Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ jeweils **LOOP**-Programme an, die f berechnen:

- a) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto x \div y$.
- b) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \max(x, y)$.
- c) $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $(x, y) \mapsto \text{ggT}(x, y)$.

2. Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ist folgendermaßen definiert:

- $A(0, y) = y + 1$,
- $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$ und
- $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ eine Funktion $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an mit $f_i(n) = A(i, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Machen Sie sich das Wachstum für $i = 4$ klar.

3. Für $i \geq 0$ sei LOOP_i die Menge der LOOP-Programme, in denen LOOP-Anweisungen höchstens in der Schachtelungstiefe i vorkommen. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ LOOP_i -berechenbar, falls f von einem LOOP_i -Programm berechenbar ist.

- a) Zeigen Sie, dass es eine LOOP_1 -berechenbare Funktion $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, die nicht LOOP_0 -berechenbar ist.
- b) Zeigen Sie, dass es eine LOOP_2 -berechenbare Funktion $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, die nicht LOOP_1 -berechenbar ist.
- c) Zeigen Sie, dass es eine LOOP_3 -berechenbare Funktion $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, die nicht LOOP_2 -berechenbar ist.

4. Sie dürfen für diese Aufgabe die in der Vorlesung als primitiv rekursiv nachgewiesenen Funktionen benutzen. Zeigen Sie von den folgenden Funktionen, dass sie primitiv rekursiv sind:

- a) $\exp : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\exp(x) = 2^x$.
- b) $\text{sgn} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$
- c) $\text{pred} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{pred}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$
- d) $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $c(x, y) = 2^x \cdot (2y + 1) - 1$