Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau-Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken
- Kapitel 7: ABoxen und Anfragebeantwortung

Kapitel 3

Ausdrucksstärke
und Modellkonstruktionen

Ziel des Kapitels

Die wichtigsten Eigenschaften einer BL sind

- Ausdrucksstärke und
- Komplexität

Die Aussdrucksstärke kann man nicht linear quantifizieren, sondern nur beschreiben und charakterisieren.

Wir

- etablieren mehrere Konstruktionen auf Modellen und
- verwenden diese, um die Aussdrucksstärke von BLen zu studieren.

Kapitel 3

Ausdrucksstärke
und Modellkonstruktionen

Bisimulation

Überblick

- Bisimulation ist graphentheoretischer Begriff
  beschreibt die „Ähnlichkeit" von Graphen
- Hängt eng zusammen mit der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$
- Wir formalisieren den Zusammenhang, betrachten zwei Anwendungen:
  - Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit von Eigenschaften
  - Baummodelleigenschaft

Bisimulation

Definition 3.1 (Bisimulation)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen.

Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist *Bisimulation* zwischen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$, wenn gilt:

1. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$, dann gilt für alle Konzeptnamen A:
$$d_1 \in A^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$$
2. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$.
3. Wenn $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_1' \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$.

T3.1

Bisimulation

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

$(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$: es gibt Bisimulation ρ zwischen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ mit $d_1 \; \rho \; d_2$ (wir sagen: d_1 ist *bisimilar* zu d_2).

Beachte: die leere Relation ist immer Bisimulation!

Theorem 3.2.
Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.
Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C:
$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$
T3.2

Intuitiv: $\mathcal{ALC}$ kann nicht zwischen d_1 und d_2 „unterscheiden".

Ausdrucksstärke

Wir interessieren uns für Eigenschaften von Elementen d in Interpretationen $\mathcal{I}$.

Definition 3.3 (Eigenschaft, Ausdrückbarkeit)
Eine *Eigenschaft* E ist eine Menge von Paaren $(\mathcal{I}, d)$,
wobei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ein Element in $\mathcal{I}$ ist.

E ist *in* $\mathcal{ALC}$ *ausdrückbar*, wenn es ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C gibt,
so dass für alle $\mathcal{I}$ und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:
$$(\mathcal{I}, d) \in E \quad \text{gdw.} \quad d \in C^{\mathcal{I}}$$

Intuitionen:

- $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ hat die Eigenschaft E gdw. $(\mathcal{I}, d) \in E$.
- E ist ausdrückbar, wenn es ein *äquivalentes* $\mathcal{ALC}$-Konzept C gibt.

Ausdrucksstärke

Typische Eigenschaften, für deren Ausdrückbarkeit wir uns interessieren:

- d hat einen r-Nachfolger in $\mathcal{I}$
- es gibt einen von d ausgehenden endlichen r-Pfad in $\mathcal{I}$, dessen letztes Element Instanz von C ist
- jedes Element von $\Delta^{\mathcal{I}}$ ist r-Nachfolger von d

Eigenschaft kann auch in logischem Formalismus gegeben sein, z.B.:

- $\exists r^{-}.A$
- $\exists y\,(r(y,x) \wedge A(y))$

Anwendungen von Bisimulation I

Beschränkungen der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$ beweisen.

Das ist schwierig mit syntaktischen Argumenten,

Bisimulation erlaubt semantisches Argument!

Theorem 3.4.
In $\mathcal{ALC}$ sind nicht ausdrückbar:

- das $\mathcal{ALCI}$-Konzept $\exists r^{-}.\top$;
- die $\mathcal{ALCQ}$-Konzepte
  - $(\leqslant n\ r\ \top)$ für alle $n > 0$ und
  - $(\geqslant n\ r\ \top)$, für alle $n > 1$.

T3.3

Anwendungen von Bisimulation I

Im Beweis von Theorem 3.4 gesehen:

Die Argumentation zum Beweis der Nicht-Ausdrückbarkeit läuft immer auf dasselbe hinaus:

Theorem 3.5.
Sei E eine Eigenschaft. Wenn es Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ und Elemente $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ gibt, so dass

- $(\mathcal{I}_1, d_1) \in E$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \notin E$ sowie
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$,

dann ist E nicht in $\mathcal{ALC}$ ausdrückbar.

Anwendungen von Bisimulation II

Interpretation ist *Baum* gdw. $(\Delta^{\mathcal{I}}, \bigcup_r r^{\mathcal{I}})$ Baum (endl. oder unendl.)

$\mathcal{ALC}$ hat die *Baummodelleigenschaft*:

Theorem 3.6.
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein <u>gemeinsames Baummodell</u> $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}$ Baum, Wurzel in $C^{\mathcal{I}}$

T3.4

Grundlage für Algorithmen, erlaubt Aussagen über Ausdrucksstärke

Beweis der Baummodelleigenschaft mittels fundamentaler Modellkonstruktion: *Unravelling*.

Anwendungen von Bisimulation II

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

d-Pfad in $\mathcal{I}$: Sequenz $d_0 d_1 \cdots d_{n-1}$, $n \geq 1$, mit

- $d_0 = d$
- für alle $i < n$: es gibt Rollenname r mit $(d_i, d_{i+1}) \in r^{\mathcal{I}}$

Wir setzen $\mathsf{end}(d_0 \cdots d_{n-1}) = d_{n-1}$ T3.6

Definition 3.7. (Unravelling)
Unravelling von $\mathcal{I}$ an Stelle d ist folgende Interpretation $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{J}} &= \text{Menge aller } d\text{-Pfade in } \mathcal{I} \\
A^{\mathcal{J}} &= \{p \in \Delta^{\mathcal{J}} \mid \mathsf{end}(p) \in A^{\mathcal{I}}\} \\
r^{\mathcal{J}} &= \{(p, p') \in \Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{J}} \mid \exists e : p' = p \cdot e \text{ und } (\mathsf{end}(p), e) \in r^{\mathcal{I}}\}
\end{aligned}$$

für alle Konzeptnamen A und Rollennamen r. T3.6 cont

Anwendungen von Bisimulation II

Sei $\mathcal{J}$ Unravelling von $\mathcal{I}$ an Stelle d.

Lemma 3.8.
Für alle $\mathcal{ALC}$-Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$\mathsf{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad p \in C^{\mathcal{J}}$$

T3.7

Es folgt Theorem 3.6.

Theorem 3.6.
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Baummodell $\mathcal{I}$.

T3.8

Baummodelleigenschaft gilt nicht in FO.

Bisimulation versus Ausdrucksstärke

Entsprechen Bisimulationen *genau* der Ausdrucksstärke von $\mathcal{ALC}$?

Nein! Gegenrichtung von Theorem 3.2 gilt nicht:

Es gibt Interpretationen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ und $d \in \mathcal{I}$, $x \in \mathcal{J}$ so dass
$d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $x \in C^{\mathcal{J}}$ für all $\mathcal{ALC}$-Konzepte C, aber $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, x)$.

T3.9

Sie gilt allerdings für verschiedene Klassen von Interpretationen, z. B.:

- die Klasse aller endlichen Interpretationen
- die Klasse aller Interpretationen mit endlicher Verzweigungszahl
- ...

Derartige Klassen nennt man Henessy-Milner-Klassen.

Bisimulation für Erweiterungen von ALC

Für $\mathcal{ALCI}$, $\mathcal{ALCQ}$ und $\mathcal{ALCQI}$ gibt es ebenfalls Bisimulationsbegriffe.

Zusätzliche Bedingungen für $\mathcal{ALCI}$:

4. Wenn $d_1 \;\rho\; d_2$ und $(d_1', d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \;\rho\; d_2'$ und $(d_2', d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$.
5. Wenn $d_1 \;\rho\; d_2$ und $(d_2', d_2) \in r^{\mathcal{I}_2}$ für beliebigen Rollennamen r, dann gibt es ein $d_1' \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ mit $d_1' \;\rho\; d_2'$ und $(d_1', d_1) \in r^{\mathcal{I}_1}$.

Dann gilt Theorem 3.2 und man kann z. B.
eine Variante der Baummodell-Eigenschaft für $\mathcal{ALCI}$ beweisen
(Kanten im Baum können auch zur Wurzel gerichtet sein).

Auch $\mathcal{ALCQ}$ und $\mathcal{ALCQI}$ haben die Baummodelleigenschaft.

Kapitel 3

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Endliche Modelleigenschaft und Filtration

Überblick

- *Endliche Modelleigenschaft*: wenn C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$, dann haben C und $\mathcal{T}$ auch *endliches* Modell
- *Filtration* wandelt Modell von Konzept und TBox in endliches Modell
- Zentrale Idee: Identifikation *ununterscheidbarer* Elemente
  (im Sinne von: erfüllen dieselben Konzepte)

Größe von Konzepten und TBoxen

Definition 3.9.
Größe $|C|$ eines $\mathcal{ALC}$-Konzeptes C ist induktiv definiert:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \\ |\neg C| &= |C| + 1 \\ |C \sqcap D| &= |C \sqcup D| = |C| + |D| + 1 \\ |\exists r.C| &= |\forall r.C| = |C| + 3 \end{aligned}$$

Größe $|\mathcal{T}|$ einer TBox $\mathcal{T}$ ist

$$\sum_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} |C| + |D| + 1$$

Intuitiv: Anzahl Symbole in C bzw. $\mathcal{T}$.

Endliche/beschränkte Modelleigenschaft

$\mathcal{ALC}$ hat *endliche Modelleigenschaft*:

Theorem 3.10
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames *endliches* Modell.

Gilt nicht in der Logik erster Stufe!

$\mathcal{ALC}$ hat sogar *beschränkte Modelleigenschaft*:

Theorem 3.11
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der *Kardinalität* $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Typ

Im Folgenden sei C $\mathcal{ALC}$-Konzept und $\mathcal{T}$ TBox, so dass C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$.

Wir definieren den Begriffs eines *Typs*:

- ist Menge von Konzepten
- beschreibt einen Punkt $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ in einer Interpretation $\mathcal{I}$
- Einschränkung auf Teilkonzepte von C und $\mathcal{T}$ (um Endlichkeit zu erreichen)

Zentral für viele Techniken im Bereich Beschreibungslogik

Typ

Definition 3.12 (Teilkonzepte)

- $\mathsf{sub}(C)$ ist Menge der Teilkonzepte von C, einschließlich C.
- $\mathsf{sub}(\mathcal{T}) \;:=\; \bigcup_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \mathsf{sub}(C) \cup \mathsf{sub}(D)$
- $\mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \;:=\; \mathsf{sub}(C) \cup \mathsf{sub}(\mathcal{T})$ T3.10

Lemma 3.13
$|\mathsf{sub}(C, \mathcal{T})| \leq |C| + |\mathcal{T}|$

Typ

Definition 3.14 (Typ von d)
Sei $\mathcal{I}$ Interpretation, $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Der *Typ* $t_{\mathcal{I}}(d)$ *von* d *in* $\mathcal{I}$ ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{D \in \mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \mid d \in D^{\mathcal{I}}\}. \qquad \text{T3.11}$$

Lemma 3.15
Für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: $\#\{t_{\mathcal{I}}(d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \;\leq\; 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$

Filtration: Idee

- Gegeben Interpretation $\mathcal{I}$, identifiziere alle Elemente gleichen Typs
- Danach kommt also jeder Typ nur einmal vor
- Nach Lemma 3.15 gibt es nur $2^{|C|+|\mathcal{T}|}$ viele Typen
- Wenn $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$, so auch das Resultat

Filtration

Definition 3.16 (Filtration)
Sei $\mathcal{I}$ Interpretation. Definiere Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\Delta^{\mathcal{I}}$:

$$d \sim e \quad \text{gdw.} \quad t_{\mathcal{I}}(d) = t_{\mathcal{I}}(e)$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ bzgl. $\sim$ mit $[d]$.

Die *Filtration* von $\mathcal{I}$ bzgl. C und $\mathcal{T}$ ist folgende Interpretation $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{J}} &= \{[d] \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \\ A^{\mathcal{J}} &= \{[d] \mid d \in A^{\mathcal{I}}\} \quad \text{für alle } A \in \mathsf{sub}(C, \mathcal{T}) \\ r^{\mathcal{J}} &= \{([d],[e]) \mid \exists d' \in [d], e' \in [e] : (d', e') \in r^{\mathcal{I}}\} \\ &\quad \text{für alle Rollennamen } r \end{aligned}$$

Beachte: $A^{\mathcal{J}}$ ist wohldefiniert (Repräsentantenunabhängigkeit).

T3.11cont

Theorem 3.17
Wenn $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$, so auch $\mathcal{J}$.

T3.12

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft

Theorem 3.11 folgt nun unmittelbar aus Theorem 3.17 und Lemma 3.15.

Theorem 3.11
Wenn ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C bzgl. einer $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$ erfüllbar ist, dann haben C und $\mathcal{T}$ ein gemeinsames Modell der Kardinalität $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Ähnliche Resultate lassen sich für $\mathcal{ALCI}$ und $\mathcal{ALCQ}$ beweisen.
(mit derselben Schranke)

Endliche/Beschränkte Modelleigenschaft

Theorem 3.18
$\mathcal{ALCQI}$ hat *nicht* die endliche Modelleigenschaft.

Beweis:

A hat nur unendliche Modelle bzgl. folgender TBox:

$$\begin{aligned} \top &\sqsubseteq \exists r.\neg A \\ \top &\sqsubseteq (\leqslant 1\, r^{-}\, \top) \end{aligned}$$

T3.13

Filtration für $\mathcal{ALCQI}$ also nicht anwendbar.

Entscheidbarkeit

Theorem 3.11:
Wenn C erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$, dann haben C und $\mathcal{T}$ Modell der Größe $\leq 2^{|C|+|\mathcal{T}|}$.

Daraus folgt, dass Erfüllbarkeit entscheidbar ist:

Algorithmus für Erfüllbarkeit:
Gegeben C und $\mathcal{T}$, so dass $|C| + |\mathcal{T}| = n$,

- erzeuge alle Interpretation $\mathcal{I}$ mit $|\Delta|^{\mathcal{I}} \leq 2^n$
  (es gibt „nur“ höchstens $2^{2^{5n}}$ viele davon)

T3.14

- überprüfe, ob $\mathcal{I}$ Modell von C und $\mathcal{T}$
  (in Zeit polynomiell in $\mathcal{I}$, C und $\mathcal{T}$)

Entscheidbarkeit

Lemma 3.19 Gegeben sei $\mathcal{ALC}$-Konzept C und endl. Interpretation $\mathcal{I}$. Man kann in polynomieller Zeit – genauer: in Zeit $\mathcal{O}(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$ – die Extension $C^{\mathcal{I}}$ berechnen.

Korollar 3.20 Gegeben seien C, $\mathcal{T}$ in $\mathcal{ALC}$ und endl. Interpretation $\mathcal{I}$. Man kann in polynomieller Zeit – genauer: in Zeit $\mathcal{O}((|\mathcal{T}| + |C|) \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$ – entscheiden, ob $\mathcal{I}$ ein Modell von C und $\mathcal{T}$ ist.

(*Model checking* in Polynomialzeit)

Entscheidbarkeit

Beweis von Lemma 3.19.

Folgender rekursiver Algorithmus berechnet die Extension von C in $\mathcal{I}$:

procedure $ext(C,\mathcal{I})$
case $C = A$: return $A^{\mathcal{I}}$
$C = \neg D$: return $\Delta^{\mathcal{I}} \setminus ext(D,\mathcal{I})$
$C = D \sqcap E$: return $ext(D,\mathcal{I}) \cap ext(E,\mathcal{I})$
$C = D \sqcup E$: return $ext(D,\mathcal{I}) \cup ext(E,\mathcal{I})$
$C = \exists r.D$: return $\{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists e \in ext(D,\mathcal{I}) : (d,e) \in r^{\mathcal{I}}\}$
$C = \forall r.D$: return $\{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall e \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ mit } (d,e) \in r^{\mathcal{I}} : ext(D,\mathcal{I})\}$
endcase

Zeitaufwand dieses Algorithmus ist $\mathcal{O}(|C| \cdot |\Delta^{\mathcal{I}}|)$:

- Anzahl der (rekursiven) Aufrufe $= |\mathsf{sub}(C)| \leq |C|$
- pro Aufruf Zeitaufwand $\mathcal{O}(|\Delta^{\mathcal{I}}|)$:
  simple Operationen auf ≤ 2 Teilmengen von $\Delta^{\mathcal{I}}$

Entscheidbarkeit

Theorem 3.21
In $\mathcal{ALC}$ ist Erfüllbarkeit bzgl. TBoxen entscheidbar.

Komplexität: 2-ExpTime

2-exponentiell viele Interpretationen müssen geprüft werden

jede Prüfung braucht polynomielle Zeit.

Dieser Ansatz ist kaum tauglich für die Praxis:

- Die Komplexität ist höher als nötig
- Das Aufzählen aller Modelle ist nicht praktikabel