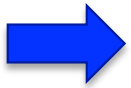
Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau-Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
-  Kapitel 6: Effiziente Beschreibungslogiken
- Kapitel 7: ABoxen und Anfragebeantwortung

Kapitel 6

Effiziente Beschreibungslogiken

Ziel des Kapitels

Für manche Anwendungen ist $\mathcal{ALC}$ zu komplex:

- Auch hoch-optimierte Reasoner können sehr große und komplexe Ontologien oft nicht verarbeiten (oder nur nach intensivem Tuning)
- In der Anfragebeantwortung muss man oft mit sehr großen Datenmengen umgehen und braucht schnelle Antworten (Kapitel 7)

Wir betrachten die Beschreibungslogik $\mathcal{EL}$:

- viel weniger ausdrucksstark als $\mathcal{ALC}$, Basisoperatoren $\sqcap$ und $\exists r.C$
- Erfüllbarkeit und Subsumption in Polyzeit entscheidbar

EL

Definition 6.1

Ein $\mathcal{EL}$-*Konzept* ist ein $\mathcal{ALC}$-Konzept, in dem nur die Konstruktoren $\top$, $\sqcap$ und $\exists r.C$ verwendet werden.

Beliebt für biomedizinische Ontologien (groß, hoher Abstraktionsgrad):

$$\begin{aligned} \text{Perikardium} &\sqsubseteq \text{Gewebe} \sqcap \exists \text{teilVon}.\text{Herz} \\ \text{Perikarditis} &\equiv \text{Entzündung} \sqcap \exists \text{ort}.\text{Perikardium} \\ \text{Entzündung} &\sqsubseteq \text{Krankheit} \sqcap \exists \text{wirktAuf}.\text{Gewebe} \end{aligned}$$

SNOMED CT ist in unwesentlicher Erweiterung von $\mathcal{EL}$ formuliert.

$\mathcal{EL}$ ist Grundlage des EL-Profils von OWL 2.

Simulation

Intuitiv: $\mathcal{EL}$ ist die „Hälfte von $\mathcal{ALC}$ “;
Simulation entspricht der „Hälfte von Bisimulation“

Definition 6.2 (Simulation)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen.

Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist *Simulation* von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ wenn

1. $d_1 \ \rho \ d_2$ und $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$, für alle Konzeptnamen A.

2. $d_1 \ \rho \ d_2$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert die Existenz eines $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \ \rho \ d_2'$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_2}$, für alle Rollennamen r.

T6.1

Beachte: im Gegensatz zu Bisimulationen sind Simulationen gerichtet!

Simulation

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

$(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$: es gibt Simulation ρ von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ mit
$d_1 \ \rho \ d_2$ (wir sagen: d_1 *wird simuliert von* d_2).

Theorem 6.3.
Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.
Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte C:

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{impliziert} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

T6.2

Simulation

Intuitiv: Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$,
dann kann $\mathcal{EL}$ nicht zwischen d_1 und d_2 „unterscheiden“.

Achtung: Bisimulation und wechselseitige Simulation sind nicht dasselbe:

Lemma 6.4.

Es gibt $(\mathcal{I}_1, d_1)$ und $(\mathcal{I}, d_2)$ so dass

- $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \not\sim (\mathcal{I}_2, d_2)$

T6.3

Man kann nun wieder Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate zeigen:

Lemma 6.5.

Das $\mathcal{ALC}$-Konzept $\forall r.A$ ist nicht in $\mathcal{EL}$ ausdrückbar.

T6.3 cont

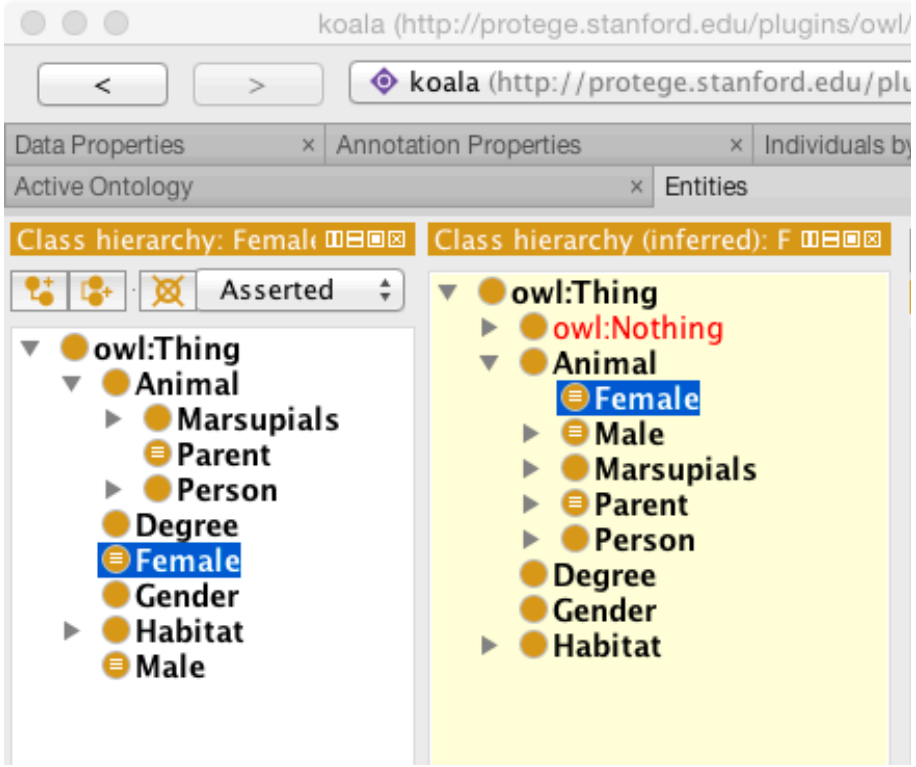
EL

In $\mathcal{EL}$ ist Erfüllbarkeit kein interessantes Schlussfolgerungsproblem:

Lemma 6.6

Jedes $\mathcal{EL}$-Konzept ist erfüllbar bzgl. jeder TBox. T6.4

Darum konzentrieren wir uns auf Subsumtion.



Kapitel 6

Subsumtion ohne TBox

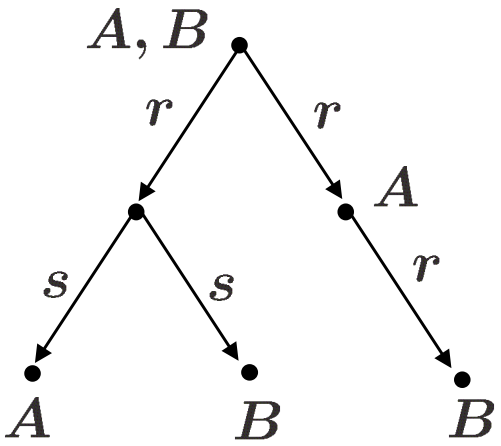
Subsumtion ohne TBox

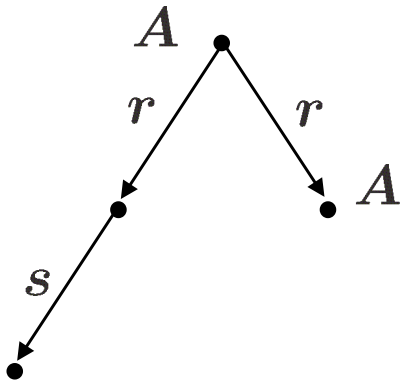
Eine Subsumtion $C \sqsubseteq D$ gilt in $\mathcal{EL}$ im Prinzip genau dann,
wenn man D syntaktisch „in C wiederfindet“

Z.B.: $C = A \sqcap B$
$\sqcap \exists r.(\exists s.A \sqcap \exists s.B)$
$\sqcap \exists r.(A \sqcap \exists r.B)$

$D = A$
$\sqcap \exists r.\exists s.\top$
$\sqcap \exists r.A$

Konzepte dargestellt als Bäume:
„Wiederfinden“ entspricht Simulation von D-Baum in C-Baum (Richtung!)





Subsumtion ohne TBox

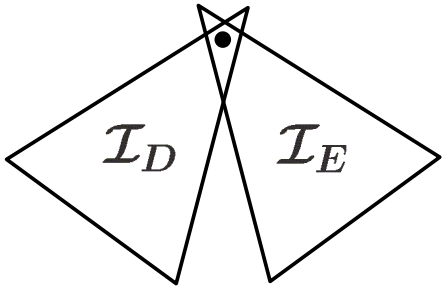
Definition 6.7.

Wir ordnen induktiv jedem $\mathcal{EL}$-Konzept C eine Interpretation $\mathcal{I}_C$ zu:

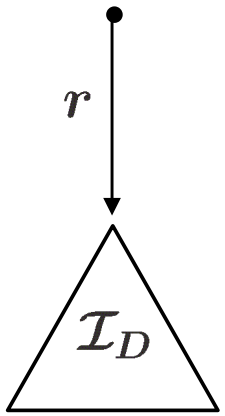
- $C = \top$ Modell $\mathcal{I}_C$:

- $C = A$ Modell $\mathcal{I}_C$:

- $C = D \sqcap E$ Modell $\mathcal{I}_C$:



- $C = \exists r.D$ Modell $\mathcal{I}_C$:



Subsumtion ohne TBox

Wir nennen $\mathcal{I}_C$ *kanonisches Modell*, bezeichnen Wurzel stets mit d_W.

Man sieht leicht, dass kanonische Modelle wirklich *Modelle* sind:

Lemma 6.8.
Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte C gilt:
Die Interpretation $\mathcal{I}_C$ ist Modell von C mit $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$. T6.5

Die zentrale Eigenschaft kanonischer Modelle:

Lemma 6.9.
Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte C, Interpretationen $\mathcal{I}$ und $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$e \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad (\mathcal{I}_C, d_W) \precsim (\mathcal{I}, e) \qquad \text{T6.6}$$

Subsumtion ohne TBox

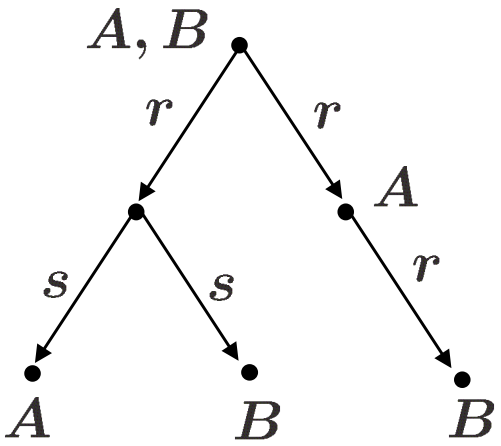
Wir zeigen nun, dass $C \sqsubseteq D$ gdw. man $\mathcal{I}_D$ in $\mathcal{I}_C$ "wiederfindet"

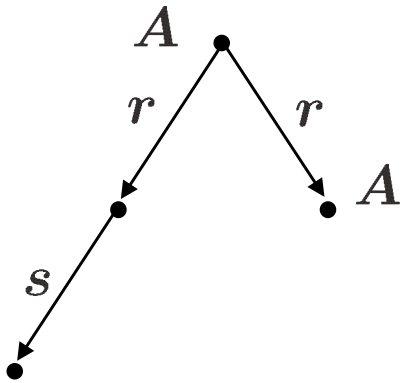
Lemma 6.10.

Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte C, D gilt: $C \sqsubseteq D$ gdw. $(\mathcal{I}_D, d_W) \precsim (\mathcal{I}_C, d_W)$ T6.7

$$C = A \sqcap B \sqcap \exists r.(\exists s.A \sqcap \exists s.B) \sqcap \exists r.(A \sqcap \exists r.B)$$

$$D = A \sqcap \exists r.\exists s.\top \sqcap \exists r.A$$





Subsumtion ohne TBox

Folgendes Theorem formuliert den (recht einfachen) Algorithmus:

Theorem 6.11.
Subsumtion in $\mathcal{EL}$ kann in polynomieller Zeit entschieden werden:

- Konstruiere $\mathcal{I}_C$ und $\mathcal{I}_D$ in polynomieller Zeit.
- Überprüfe in polynomieller Zeit, ob $(\mathcal{I}_D, d_W) \precsim (\mathcal{I}_C, d_W)$.

T6.8

Kapitel 6

Subsumtion mit TBox

Subsumtion mit TBox

Wir verwenden ein sogenanntes konsequenzbasiertes Verfahren.

Grundidee:

- Mit Hilfe von Regeln werden zur TBox nach und nach neue Konzeptinklusionen hinzugefügt.
- Am Ende muss man dann nur noch nachschauen, ob die gewünschte Subsumtion in der TBox explizit enthalten ist.

In der Praxis haben sich derartige Verfahren als äußerst effizient herausgestellt.

Sie sind verwandt mit Sequenzenkalkülen aus der klassischen Logik.

Subsumtion mit TBox

Wir konzentrieren uns auf Subsumtion von Konzept*namen* bzgl. TBoxen.

Lemma 6.12.

Seien C, D zwei beliebige $\mathcal{EL}$-Konzepte und $\mathcal{T}$ eine $\mathcal{EL}$-TBox.
Sei weiterhin $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{A_C \sqsubseteq C,\ D \sqsubseteq A_D\}$, mit Konzeptnamen A_C, A_D, die nicht in $C, D, \mathcal{T}$ vorkommen.

Dann gilt:

$$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T}' \models A_C \sqsubseteq A_D$$

(Übung)

Dies liefert Polyzeitreduktion von Subsumtion zwischen beliebigen Konzepten auf Subsumption zwischen Konzeptnamen (beides bzgl. TBoxen).

Normalform

Wir nehmen weiterhin an, dass TBoxen nur Inklusionen folgender Form enthalten:

$$A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq A \qquad A \sqsubseteq \exists r.A_1 \qquad \exists r.A \sqsubseteq A_1$$

wobei $A, A_1, \ldots, A_n$ Konzept*namen* oder $\top$

Eine derartige TBox ist *in Normalform*.

Lemma 6.13
Jede $\mathcal{EL}$-TBox $\mathcal{T}$ kann in polynomieller Zeit in eine TBox $\mathcal{T}'$ in Normalform gewandelt werden, so dass für alle Konzeptnamen A, B in $\mathcal{T}$ gilt:

$$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B \qquad (*)$$

Wenn $(*)$ gilt, sagen wir: $\mathcal{T}'$ ist *konservative Erweiterung* von $\mathcal{T}$.

Um die Normalform herzustellen, wenden wir Normalisierungsregeln an. T6.9

Normalform

NF1: $C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n \sqsubseteq E \quad \rightsquigarrow$

$$C_i \sqsubseteq A_{C_i}, \quad C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_{i-1} \sqcap A_{C_i} \sqcap C_{i+1} \sqcap \cdots \sqcap C_n \sqsubseteq E$$

wenn C_i Existenzrestriktion

NF2: $\exists r.C \sqsubseteq E \quad \rightsquigarrow \quad C \sqsubseteq A_C, \quad \exists r.A_C \sqsubseteq E$

NF3: $C \sqsubseteq \exists r.D \quad \rightsquigarrow \quad C \sqsubseteq A_C, \quad A_C \sqsubseteq \exists r.D$

NF4: $A \sqsubseteq \exists r.C \quad \rightsquigarrow \quad A \sqsubseteq \exists r.A_C, \quad A_C \sqsubseteq C$

NF5: $A \sqsubseteq C_1 \sqcap C_2 \quad \rightsquigarrow \quad A \sqsubseteq C_1, \quad A \sqsubseteq C_2$

wenn C weder Konzeptname noch $\top$

Lemma 6.14.

Jede $\mathcal{EL}$-TBox $\mathcal{T}$ kann durch linear viele Regelanwendungen in TBox in Normalform transformiert werden, die konservative Erweiterung von $\mathcal{T}$ ist.

T6.10

Subsumtion mit TBox

Der Algorithmus beginnt mit der ursprünglichen TBox und wendet dann erschöpfend folgende Regeln an.

R1: $\dfrac{}{A \sqsubseteq A}$ (wenn A in $\mathcal{T}$ vorkommt)

R2: $\dfrac{}{A \sqsubseteq \top}$ (wenn A in $\mathcal{T}$ vorkommt)

R3: $$\frac{A \sqsubseteq A_1 \quad \cdots \quad A \sqsubseteq A_n \quad A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

R4: $$\frac{A \sqsubseteq \exists r.A_1 \quad A_1 \sqsubseteq B_1 \quad \exists r.B_1 \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

T6.11

Subsumtion mit TBox

Für eine $\mathcal{EL}$-TBox $\mathcal{T}$ sei $\mathcal{T}^*$ das Ergebnis erschöpfender Regelanwendung.
Wir nennen $\mathcal{T}^*$ die *Saturierung* von $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}^*$ macht alle Subsumtionen zwischen Konzeptnamen explizit:

Theorem 6.15.
Für alle Konzeptnamen A, B in $\mathcal{T}$ gilt: $\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ gdw. $A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$

Der Algorithmus *klassifiziert* also die Konzeptnamen vollständig;
berechnet nicht nur eine einzelne Subsumtion.

Theorem 6.16.
Die Konstruktion von $\mathcal{T}^*$ terminiert nach $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|^2)$ vielen Regelanwendungen.

T6.12

Subsumtion mit TBox

Wir beweisen nun Theorem 6.15.

Lemma 6.17. [Korrektheit]
Für alle Konzeptnamen A, B gilt: $A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$ impliziert $\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$

T6.13

Interessanter ist der Beweis der Vollständigkeit.

Hier konstruieren wir ein einziges Modell, das *alle* nicht aus $\mathcal{T}$ folgenden Subsumtionen zwischen Konzeptnamen gleichzeitig falsch macht.

Die Existenz solcher *kanonischer Modelle* ist eine zentrale Eigenschaft von $\mathcal{EL}$.

Subsumtion mit TBox

Die *kanonische Interpretation* $\mathcal{I}$ ist wie folgt definiert:

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{d_A \mid A \text{ Konzeptname in } \mathcal{T}^*\} \cup \{d_\top\}$$

$$A^{\mathcal{I}} = \{d_B \mid B \sqsubseteq A \in \mathcal{T}^*\}$$

$$r^{\mathcal{I}} = \{(d_A, d_B) \mid A \sqsubseteq A' \in \mathcal{T}^* \text{ und } A' \sqsubseteq \exists r.B \in \mathcal{T}^*,\ A' \text{ Konzeptname}\}$$

T6.14

Lemma 6.18.
Die kanonische Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Model von $\mathcal{T}^*$.

T6.15

Lemma 6.19. [Vollständigkeit]
Für alle Konzeptnamen A, B gilt: $\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ impliziert $A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}^*$

T6.16

Erweiterungen von EL

Erweiterungen von EL

Der Algorithmus kann angepasst werden für $\mathcal{EL}$ erweitert mit:

- $\bot$
- „Range Restrictions“ $\top \sqsubseteq \forall r.C$ und „Domain Restrictions“ $\top \sqsubseteq \forall r^-.C$
- Rolleninklusionen mit Verkettung: $r_1 \circ \cdots \circ r_n \sqsubseteq r$
- $\cdots$

Dies (und mehr) ist im EL-Profil von OWL 2 realisiert.

Viele andere Erweiterungen lassen die Komplexität zurück auf ExpTime springen:

Wir betrachten exemplarisch

- $\mathcal{ELU}$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\sqcup$
- $\mathcal{EL}_\forall$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\forall r.C$
- $\mathcal{EL}^{\geq 2}$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $(\geq 2\, r\, \top)$

EL mit Disjunktion

Theorem 6.20

Erfüllbarkeit in $\mathcal{ELU}_\bot$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$

Schritt 1: Ersetze Werterestriktionen in $\mathcal{T}$ durch Existenzrestriktionen:

$$\forall r.C \qquad \text{wird} \qquad \neg\exists r.\neg C$$

Schritt 2: Modifiziere $\mathcal{T}$ so, dass Negation nur vor Konzeptnamen auftritt:

z. B. $A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg\exists r.B)$ wird $A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg X)$

$X \equiv \exists r.B$

(X neuer Konzeptname)

EL mit Disjunktion

Theorem 6.20

Erfüllbarkeit in $\mathcal{ELU}_\bot$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$

Schritt 3: Entferne Negation vollständig aus $\mathcal{T}$:

- Ersetze jedes $\neg X$ durch $\overline{X}$, $\overline{X}$ neuer Konzeptname
- Erzwinge korrektes Verhalten von $\overline{X}$:

$$\top \sqsubseteq X \sqcup \overline{X}$$

$$X \sqcap \overline{X} \sqsubseteq \bot$$

$\mathcal{T}'$ sei die resultierende $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox.

Lemma 6.21 T6.17

Für alle Konzeptnamen A gilt: A erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. A erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}'$

EL mit Disjunktion

Theorem 6.22

Subsumtion in $\mathcal{ELU}$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox $\mathcal{T}$

Konstruiere $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}'$:

- nimm o. B. d. A. an, dass $\bot$ nur in der Form $C \sqsubseteq \bot$ vorkommt
  (jedes $\mathcal{ELU}_\bot$-Konzept ist äquivalent zu $\mathcal{ELU}$-Konzept oder $\bot$) T6.18
- ersetze $\bot$ durch neuen Konzeptnamen L
- füge hinzu:

$$\exists r.L \sqsubseteq L \text{ für alle Rollennamen } r \text{ in } \mathcal{T}$$

Lemma 6.23

A unerfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq L$. T6.19

EL mit Werterestriktionen

$\mathcal{EL}^\forall$ ist $\mathcal{EL}$ erweitert um $\forall r.C$

Theorem 6.24 In $\mathcal{EL}^\forall$ ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Subsumtion zwischen Konzeptnamen bzgl. $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}$

Wir können annehmen, das Disjunktion nur in den folgenden Formen vorkommt:

$A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A$ und $A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2$

$= A_1 \sqsubseteq A,\ A_2 \sqsubseteq A$

ersetze in $\mathcal{T}'$ durch

$A \sqcap \exists r.\top \sqsubseteq B_1$

$A \sqcap \forall r.X \sqsubseteq B_2$

r, X neu

Lemma 6.25

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ gdw. $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$.

T6.20

EL mit Zahlenrestriktionen

$\mathcal{EL}^{\geq 2}$ ist $\mathcal{EL}$ erweitert um $(\geq 2\, r\, \top)$

Theorem 6.26 In $\mathcal{EL}^{\geq 2}$ ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Subsumtion zwischen Knozeptnamen bzgl. $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}$

Wir können annehmen, das Disjunktion nur in den folgenden Formen vorkommt:

$$A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A \quad \text{und} \quad A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2$$

$$= A_1 \sqsubseteq A,\ A_2 \sqsubseteq A$$

ersetze in $\mathcal{T}'$ durch

$$A \sqsubseteq \exists r.X \sqcap \exists r.Y$$

$$A \sqcap \exists r.(X \sqcap Y) \sqsubseteq B_1$$

$$A \sqcap (\geq 2\, r) \sqsubseteq B_2$$

r, X, Y neu

Lemma 6.27

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ gdw. $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$.

Konvexität

Erweiterung von $\mathcal{EL}$ ist *konvex*, wenn für alle TBoxen $\mathcal{T}$ und Konzepte C, D_1, D_2:

$$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_i \text{ für ein } i \in \{1, 2\}$$

$\mathcal{EL} + \forall r.C$ ist *nicht konvex*:

$$\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq \exists r.\top \sqcup \forall r.X, \quad \text{aber } \mathcal{T} \not\models \top \sqsubseteq \exists r.\top \text{ und } \mathcal{T} \not\models \top \sqsubseteq \forall r.X$$

Unsere Beweise zeigen im Prinzip:
jede nicht-konvexe Erweiterung von $\mathcal{EL}$ ist ExpTime-hart.

Aber auch konvexe Erweiterungen sind leider nicht zwangsläufig in PTime:

Zum Beispiel ist $\mathcal{ELI}$ ($\mathcal{EL}$ erweitert mit $\exists r^-.C$) konvex,
aber ExpTime-vollständig.

Für konvexe Erweiterungen gibt es oft effiziente konsequenzbasierte Algorithmen.

Zusammenfassung für EL

Die $\mathcal{EL}$-Familie von BLen:

- Erlaubt Schlussfolgern in polynomieller Zeit
- Es gibt viele Reasoner wie ELK, CEL, SNOROCKET
- Skaliert auch auf große Terminologien wie SNOMED CT
  ($> \mathbf{400.000}$ Konzepte, wird in wenigen Sekunden klassifiziert)
- Stellt viele Operatoren zur Verfügung,
  hat aber eingeschränktes Ausdrucksvermögen
  (z. B. kann keine Disjunktion ausgedrückt werden – Konvexität!)