Komplexitätstheorie

SoSe 2019

Jean Christoph Jung, Thomas Schneider

Kapitel 3: P versus NP

Homepage der Vorlesung: `http://tinyurl.com/ss19-kt`

P versus NP

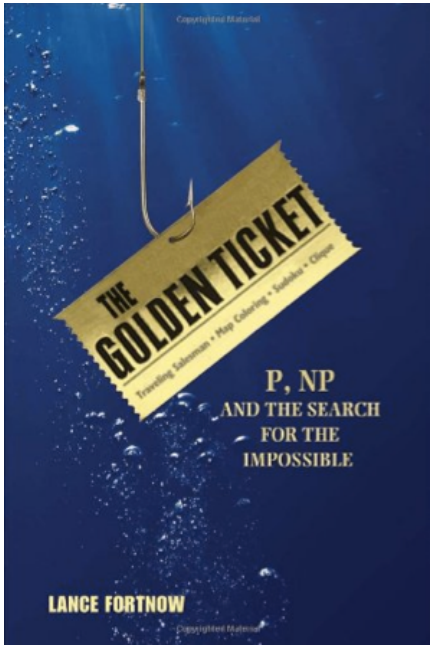
Wir definieren die wichtigen Komplexitätsklassen P und NP und studieren deren Zusammenhang:

- Definitionen der Klassen, polynomielle Beweissysteme
- Zusammenhang zwischen NP und Nichtdeterminismus
- NP-Vollständigkeit
- Beispiele für NP-vollständige Probleme
- Komplemente und coNP

Dies wird Basis für weiterführende Themen sein:

- Isomorphie und spärliche Mengen
- Satz von Ladner und Constraint-Satisfaction-Probleme

Einleitung



Kapitel 3

Die Klasse P

Traditionelle Sicht:

Problem ist „effizient lösbar“ gdw. es in polynomieller Zeit lösbar ist
(Polynom von beliebigem Grad!)

Entsprechende Komplexitätsklasse:

$$\mathrm{P} := \bigcup_{i \geq 1} \mathrm{DTime}(n^i) \qquad \text{(oft auch PTIME)}$$

Probleme in P nennt man oft auch tractable.

Die Klasse P

Warum ist P eine „gute“ Komplexitätsklasse?

- Zeitkomplexität n^k mit sehr großem k ist zwar bedenklich, aber Polynome mit großem Grad sind fast nie notwendig.
- Nach erweiterter Church-Turing-These ist die Klasse P für alle Berechnungsmodelle identisch (z. B. 1- vs. k-Band-TMs)
- P ist abgeschlossen unter den üblichen Kompositionsoperationen auf Algorithmen. **T3.1**

Die letzten beiden Eigenschaften werden z. B. von $\mathrm{DTime}(n)$ nicht erfüllt.

Die Klasse NP

Sehr viele Probleme in der Informatik haben folgende Charakteristik:

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

- wenn $w \in L$ (w ist „Ja-Instanz“),
  dann gibt es einen einfach zu verifizierenden Beweis dafür, der von kurzer Länge ist (polynomiell in der Länge von w)
- wenn $w \notin L$ (w ist „Nein-Instanz“),
  dann gibt es keinen solchen Beweis.

Diese Beobachtung ist die Grundlage für die Definition der Komplexitätsklasse NP.

Beispiel 1: Cliquenproblem

Beim Cliquenproblem ist der „Beweis“ die Clique selbst:

- wenn $(G, k) \in$ CLIQUE, dann gibt es Knotenmenge $\{v_1, \ldots, v_k\}$, die Clique in G ist;
- wenn $(G, k) \notin$ CLIQUE, dann gibt es keine solche Menge.

Der Beweis ist einfach zu verifizieren: man kann offensichtlich in polynomieller Zeit entscheiden, ob gegebene Knotenmenge Clique ist.

Der Beweis ist kurz: nicht größer als der Graph.

Beispiel 2: Rucksackproblem

Intuitionen:

- Es soll ein Rucksack mit gegebener Kapazität gepackt werden.
- Es gibt eine Menge von zu packenden Gegenständen mit unterschiedlichem Wert und Gewicht.
- Man möchte Gegenstände von maximalem Gesamtwert mitnehmen.

Beispiel 2: Rucksackproblem

Definition Rucksackproblem

Sei $M = \{a_1, \ldots, a_k\}$ eine Menge von *Gegenständen*, wobei Gegenstand a_i Gewicht g_i und Nutzen n_i hat.

Sei $G \geq 0$ eine Gewichtsgrenze und N ein intendierter Nutzen.

Lösung für Rucksackproblem (M, G, N) ist Teilmenge $R \subseteq M$, so dass

1. $\sum_{a_i \in R} g_i \leq G$ und
2. $\sum_{a_i \in R} n_i \geq N$.

RP ist die Menge aller Instanzen (M, G, N), für die eine Lösung existiert.

T3.2

Beweis für Ja-Instanz (M, G, N) ist Teilmenge $R \subseteq M$, die 1.+2. erfüllt

Offenbar nicht länger als Eingabe & leicht zu verifizieren!

Beispiel 3: Integer Programming

Definition Integer Programming

Ein *lineares Gleichungssystem* G ist eine Menge von Gleichungen der Form

$$c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n = \alpha,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n \in V$, V Variablenmenge, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in V \cup \mathbb{N}$.

Lösung ist Abbildung $\tau : V \to \mathbb{N}$, so dass alle Gleichungen in G erfüllt sind.

IPROG ist Menge aller Gleichungssysteme G, für die eine Lösung existiert.

T3.3

Gegeben einen Lösungskandidaten kann man offensichtlich in polynomieller Zeit überprüfen, ob er Lösung ist (Addition).

Es ist aber nicht offensichtlich, dass es immer kurze Lösungen/Beweise für IPROG gibt ($\mathbb{N}$ hat Elemente unbeschränkter Größe).

Beispiel 3: Integer Programming

Ohne Beweis:

Theorem (Papadimitriou)

Sei G Gleichungssystem mit m Gleichungen, n Variablen sowie Konstanten, deren Werte durch a beschränkt sind.

Dann gibt es Lösung gdw. es eine Lösung $\tau : V \to \mathbb{N}$ gibt mit $\tau(x) \leq n(ma)^{2m+1}$ für alle $x \in V$.

→ Also kann man als „kleine Beweise“ verwenden:

- Lösungen, deren Zahlenwerte wie im o. g. Theorem beschränkt sind
- Zahlenwerte sind exponentiell in der Größe von G, also ist deren binäre Repräsentation nur polynomiell groß ($\log(2^n)$ ist polynomiell!)

Die Klasse NP

Es gibt Tausende solcher Probleme …

Wir setzen:

„einfach zu verifizieren“: in polynomieller Zeit

„kurzer Beweis“: Länge des Beweises polynomiell in Länge der Instanz

Daraus ergibt sich die Definition der Klasse NP.

Die Klasse NP

Definition Komplexitätsklasse NP

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Gamma^*$ ist *Beweissystem* für L, wenn

- $(w, b) \in R$ impliziert $w \in L$ und (Korrektheit)
- $w \in L$ impliziert $(w, b) \in R$ für ein $b \in \Gamma^*$ (Vollständigkeit)
  so ein b heißt *Beweis* oder *Zeuge* für w

R ist *polynomiell*, wenn

- es gibt Polynom p, so dass $|b| \leq p(|w|)$ für alle $(w, b) \in R$
- $R \in$ P (d. h.: gegeben $w \in \Sigma^*$ und $b \in \Gamma^*$
  kann DTM in polynomieller Zeit entscheiden, ob $(w, b) \in R$)

NP ist Klasse aller Probleme L, für die es polynomielles Beweissystem gibt.

Die Beispiele haben gezeigt:

CLIQUE, RP, IPROG sind in NP.

Kapitel 3

P versus NP

Theorem

P $\subseteq$ NP $\subseteq$ ExpTime, wobei ExpTime $:= \bigcup_{i \geq 1} \text{DTime}(2^{\mathcal{O}(n^i)})$.

T3.4

Sehr unbefriedigend:

Für viele wichtige Probleme in NP (z. B. CLIQUE, RP, IPROG) ist unbekannt, ob sie in P (also effizient lösbar) sind!

Es ist sogar unbekannt, ob P ≠ NP (und NP ≠ ExpTime)

P versus NP

Intuitive Formulierung der P-versus-NP-Frage:

Ist das Finden eines Beweises schwieriger als das Überprüfen?

Unsere Intuition sagt ja, also P ≠ NP!

In der Tat glaubt eigentlich niemand, das P = NP,
aber ein Beweis konnte seit 50 Jahren nicht geführt werden!

Die P-versus-NP-Frage …

- ist eines der wichtigsten offenen Probleme der Informatik
- wurde vom *Clay Mathematics Institute* als eins von sieben Millenium Prize Problems ausgelobt

P versus NP

Konsequenzen eines Beweises von

- P = NP: dramatisch.

  Tausende bisher als sehr schwierig eingestufter Probleme wären dann wohl effizient lösbar
  (z. B. CLIQUE, RP, IPROG)

- P ≠ NP: weniger dramatisch – aber wichtig zu wissen:

  Möglicherweise interessante Konsequenzen in Kryptographie
  (dort: schwierige Probleme nützlich statt ärgerlich!)

Kapitel 3

Die Klasse NP

Die Klasse NP hat viele äquivalente Charakterisierungen:

- polynomielle Beweissysteme
- nichtdeterministische Turingmaschinen
- existentielle Logik zweiter Stufe (Satz von Fagin)
- randomisierte Beweissysteme (PCP-Theorem)
- etc.

Nichtdeterministische TMs

Nichtdeterministische Turingmaschinen (NTMs) generalisieren DTMs:

- Statt Übergangs*funktion* δ haben sie Übergangs*relation*

$$\Delta \subseteq (Q \setminus \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

- (q, a, q', a', L) heißt: wenn M in q ist und a liest, so kann sie nach q' gehen, a' schreiben und sich nach links bewegen
- *Relation*: NTM hat u. U. mehrere Möglichkeiten für nächsten Schritt
- Konfigurationen / Berechnungen definiert wie für DTMs
- Es gibt jetzt mehrere Berechnungen auf derselben Eingabe
- NTM *akzeptiert* Eingabe w,
  wenn mindestens eine Berechnung auf w akzeptierend

Nichtdeterministische TMs

Definition NTime

Für NTM M und $w \in \Sigma^*$ schreiben wir $\text{time}_M(w) = n$,
wenn alle Berechnungen von M auf w höchstens n Schritte umfassen.

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton wachsende Funktion mit $t(n) \geq n$.
M ist *t-zeitbeschränkt*, wenn $\text{time}_M(w) \leq t(n)$ für alle w der Länge n.

Zeitkomplexitätsklasse $\text{NTime}_i(t)$ ist definiert als Menge der Probleme

$$\{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \mathcal{O}(t)\text{-zeitbeschr. } i\text{-Band-NTM } M \text{ mit } L(M) = L\}.$$

Wir setzen $\text{NTime}(t) := \bigcup_{i \geq 1} \text{NTime}_i(t)$.

Theorem (NTM-Charakterisierung von NP)

$$\text{NP} = \bigcup_{i \geq 1} \text{NTime}(n^i)$$

T3.5

Nichtdeterministische TMs

Klassischerweise ist diese Charakterisierung sogar
die eigentliche Definition von NP.

Die P-versus-NP-Frage kann also auch wie folgt verstanden werden:

Kann eine nichtdeterministische Maschine in polynomieller Zeit
mehr erreichen als eine deterministische Maschine?

Kapitel 3

NP-Härte

Bisher ist es für sehr viele „typische“ NP-Probleme nicht gelungen zu zeigen, ob sie in P (effizient lösbar) sind oder nicht.

Der Begriff der NP-Härte liefert ein Mittel, solche Probleme trotzdem als schwierig klassifizieren zu können.

Starke Indikation dafür, dass Problem *L* nicht in P ist:

1. *L* ist „mindestens so schwierig“ wie alle anderen Probleme in NP
2. Daraus folgt, dass *L* nur in P ist, wenn P = NP (also unwahrscheinlich!)

Reduktionen

Reduktionen sind zentral in der Komplexitätstheorie:

- Werkzeug um Probleme zu vergleichen, nicht nur im Kontext von NP
- existieren in zahllosen Variationen (für verschiedene Zwecke)

Definition (polynomielle) Reduktion

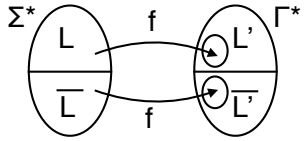
Sei $L \subseteq \Sigma^*$, $L' \subseteq \Gamma^*$. Eine *Reduktion* von L auf L' ist berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, so dass

$$w \in L \text{ gdw. } f(w) \in L' \quad \text{für alle } w \in \Sigma^*.$$

f heißt *polynomiell*, wenn f in polynomieller Zeit berechenbar ist.

Wir schreiben $L \leq_p L'$, wenn polynomielle Reduktion von L auf L' existiert.

Illustration:



Reduktionen

Intuitiv: $L \leq_p L'$ bedeutet „L' ist mindestens so schwer wie L“.

Denn: Algorithmus für L' kann mit nur polynomiellem Mehraufwand zum Lösen von L verwendet werden!

Theorem

1. P ist abgeschlossen unter polynomiellen Reduktionen:
   $L' \in$ P und $L \leq_p L'$ impliziert $L \in$ P.
2. NP ist abgeschlossen unter polynomiellen Reduktionen:
   $L' \in$ NP und $L \leq_p L'$ impliziert $L \in$ NP.
3. „Polynomiell reduzierbar“ ist transitive Relation:
   $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \leq_p L_3$ impliziert $L_1 \leq_p L_3$.

NP-Härte

Definition NP-Härte, NP-Vollständigkeit

Problem L ist

- *NP-hart*, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in$ NP;
- *NP-vollständig*, wenn L sowohl NP-hart als auch in NP.

Ein NP-hartes Problem ist also mindestens so schwer wie jedes andere Problem in NP.

Beobachtung

Wenn L NP-hart und $L \in$ P, dann P = NP.

Solange das P-versus-NP-Problem ungelöst ist, wird NP-Härte deshalb als „nicht effizient lösbar“ gewertet.

NP-Härte

Zwei Ansätze, NP-Härte von Problem L zu zeigen:

1. Zeigen, dass $L' \leq_p L$ für alle $L' \in$ NP
2. Zeigen, dass $L' \leq_p L$ für ein NP-hartes Problem L'

Lemma

Wenn L NP-hart ist und $L \leq_p L'$, dann ist L' NP-hart.

T3.6

Wir beginnen mit Ansatz 1 für das klassische SAT-Problem.

SAT

Definition Formel, Wertzuweisung, Erfüllbarkeit

Sei VAR unendlich abzählbare Menge von *Aussagenvariablen*.
Menge der *aussagenlogischen Formeln* (kurz: AL-Formeln)
ist die kleinste Menge, so dass:

- Jedes $x \in$ VAR ist AL-Formel.
- Wenn φ, ψ AL-Formeln, so auch $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$.

Eine *Belegung* ist eine Abbildung V : VAR $\to \{0,1\}$.
Belegung V wird wie folgt auf zusammengesetzte AL-Formeln erweitert:

- $V(\neg\varphi) = 1 - V(\varphi)$
- $V(\varphi \wedge \psi) = \min\{V(\varphi), V(\psi)\}$
- $V(\varphi \vee \psi) = \max\{V(\varphi), V(\psi)\}$

AL-Formel φ ist *erfüllbar*, wenn es Belegung V gibt mit $V(\varphi) = 1$.

T3.7

Der Satz von Cook

Problem **SAT:** die Menge aller erfüllbaren AL-Formeln

Theorem (Cook/Levin aka „Satz von Cook“ aka „Cook's Theorem“)

SAT ist NP-vollständig.

SAT $\in$ NP: $R = \{(\varphi, V) \mid V$ ist Belegung für Variablen in φ, die φ erfüllt $\}$ ist polynomielles Beweissystem

NP-Härte: Zeigen, dass Wortproblem jeder polyzeit-beschränkten NTM polynomiell auf SAT reduziert werden kann.

(Bekannt aus „Theoretische Informatik 2“, Satz 20.4 im Skript)

NP-Härte

Zur Erinnerung:

Zwei Ansätze, NP-Härte von Problem L zu zeigen:

1. Zeigen, dass $L' \leq_p L$ für alle $L' \in$ NP
2. Zeigen, dass $L' \leq_p L$ für ein NP-hartes Problem L'

Wir verwenden jetzt Ansatz 2 für weitere Probleme.

3SAT

Oft ist es jedoch bequemer, nur Formeln in bestimmter Form zu betrachten.

Definition 3SAT

Eine *3-Formel* hat die Form

$$\bigwedge_i (\ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \ell_{3,i})$$

wobei die $\ell_{j,i}$ *Literale* sind, also Variable oder deren Negation.

Jede Disjunktion $(\ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \ell_{3,i})$ heißt *Klausel*.

3SAT ist die Menge aller erfüllbaren 3-Formeln.

T3.8

Bekannt aus „Theoretische Informatik 2“:

3SAT ist NP-vollständig. Hier nur kurze Erinnerung.

3SAT

Theorem

3SAT ist NP-vollständig.

3SAT $\in$ NP: klar (Spezialfall von SAT)

Beweis NP-Härte: polynomielle Reduktion von SAT

Gegeben AL-Formel φ, konstruiere in polynomieller Zeit 3-Formel ψ so dass φ erfüllbar gdw. ψ erfüllbar.

Idee:

- führe Aussagenvariable für jede Teilformel von φ ein
- beschreibe das Verhalten von Teilformeln in AL
- Konvertiere entstehende Formel in 3-Formel
- Resultierende Formel ist nicht äquivalent, aber äqui-erfüllbar

T3.9

CLIQUE

Ebenfalls bekannt aus „Theoretische Informatik 2“:

Theorem

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis Härte: polynomielle Reduktion von 3SAT

3-Färbbarkeit

Wie CLIQUE sind viele interessante Probleme auf Graphen NP-vollständig.

Wir betrachten ein **weiteres Beispiel.**

Definition 3-Färbbarkeit

Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist *3-färbbar*, wenn es Abbildung

$$f : V \to \{R, G, B\}$$

gibt, so dass $\{v, v'\} \in E$ impliziert $f(v) \neq f(v')$ *(3-Färbung)*.

3F ist die Menge aller Graphen G, die 3-färbbar sind.

T3.10

Leicht zu sehen: 3F $\in$ NP

3-Färbbarkeit

Theorem

3F ist NP-vollständig.

Beweis Härte: polynomielle Reduktion von 3SAT

Gegeben 3-Formel φ, konstruiere in polynomieller Zeit Graph G so dass φ erfüllbar gdw. G 3-färbbar

Idee:

- Führe pro Literal einen Knoten ein.
- Verwende die Farben „wahr“, „falsch“ und „hilf“.
- Verbinde komplementäre Literale mit Kanten, um konsistente Belegungen zu erzwingen.
- Verwende Teilgraphen, um Erfülltsein jeder Klausel zu erzwingen.

T3.11

NP-vollständige Probleme aus anderen Bereichen

NP-vollständige Probleme gibt es nicht nur in der Logik und Graphentheorie, sondern in vielen weiteren Bereichen der Informatik.

1972 veröffentlichte Richard Karp in einem berühmten Aufsatz 21 solche (und sehr unterschiedliche) Probleme.

Im Buch „Computers and Intractability“ von Garey und Johnson finden sich ca. 300 NP-vollständige Probleme; heute kennt man Tausende!

Wir betrachten **zwei weitere Beispiele:**

- Integer Programming
- Rucksackproblem

IPROG

Zur Erinnerung:

Definition Integer Programming

Ein *lineares Gleichungssystem* G ist eine Menge von Gleichungen der Form

$$c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n = \alpha,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n \in V$, V Variablenmenge, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in V \cup \mathbb{N}$.

Lösung ist Abbildung $\tau : V \to \mathbb{N}$, so dass alle Gleichungen in G erfüllt sind.

IPROG ist Menge aller Gleichungssysteme G, für die eine Lösung existiert.

Integer Programming

Theorem

IPROG ist NP-vollständig.

Beweis Härte: polynomielle Reduktion von 3SAT

Gegeben 3-Formel φ, konstruiere in polynomieller Zeit Gleichungssystem G so dass φ erfüllbar gdw. G Lösung hat.

Idee:

- Verwende für jedes Literal eine numerische Variable.
- Stelle durch Gleichungen sicher, dass diese Variablen konsistente Werte aus dem Bereich {0,1} erhalten.
- Stelle durch zusätzliche Gleichungen sicher, dass jede Klausel mindestens ein wahres Literal enthält.

Rucksackproblem (Wdhlg.)

- Es soll ein Rucksack mit gegebener Kapazität gepackt werden.
- Es gibt eine Menge von zu packenden Gegenständen mit unterschiedlichem Wert und Gewicht.
- Man möchte Gegenstände von maximalem Gesamtwert mitnehmen.

Definition Rucksackproblem

Sei $M = \{a_1, \ldots, a_k\}$ eine Menge von *Gegenständen*, wobei Gegenstand a_i Gewicht g_i und Nutzen n_i hat.

Sei $G \geq 0$ eine Gewichtsgrenze und N ein intendierter Nutzen.

Lösung für Rucksackproblem (M, G, N) ist Teilmenge $R \subseteq M$, so dass

1. $\sum_{a_i \in R} g_i \leq G$ und
2. $\sum_{a_i \in R} n_i \geq N$.

RP ist die Menge aller Instanzen (M, G, N), für die eine Lösung existiert.

Rucksackproblem

Theorem

RP ist NP-vollständig.

Beweis Härte: polynomielle Reduktion von 3SAT

Gegeben 3-Formel φ, konstruiere in polynomieller Zeit Rucksackproblem (M, G, N) so dass φ erfüllbar gdw. (M, G, N) Lösung hat.

Idee:

- Verwende für jede Variable x_i zwei Gegenstände a_i und $\overline{a}_i$.
- Wenn x_i wahr ist, dann ist a_i im Rucksack, aber $\overline{a}_i$ nicht; wenn x_i falsch ist, dann umgekehrt.
- Für jeden Gegenstand a_i ist Gewicht g_i gleich Nutzen n_i und $G = N$.
- Zusätzlich werden Gegenstände b_i und c_i für jede Klausel benötigt.

Rucksackproblem

Beweisdetails.

Sei φ 3-Formel mit ℓ Variablen $x_1, \ldots, x_\ell$ und k Klauseln.

Konstruiere Instanz (M, G, N) von RP wie folgt.

- $M = \{a_1, \overline{a}_1, \ldots, a_\ell, \overline{a}_\ell, \ b_1, c_1, \ldots, b_k, c_k\}$
- Für alle Gegenstände ist Nutzen = Gewicht; außerdem $N = G$.
- Alle Nutzenwerte sind $(\ell + k)$-stellige Dezimalzahlen wie folgt:

  Nutzen von a_i ($\overline{a}_i$) :

  - Dezimalstelle i ist 1; Rest der ersten ℓ Dezimalstellen ist 0.
  - Dezimalstelle $\ell + j$ ist 1, wenn Literal x_i ($\neg x_i$) in j-ter Klausel auftritt, sonst 0.

  Nutzen von b_i, c_i :

  - Dezimalstelle $\ell + i$ ist 1, alle anderen 0.

$G\ (= N)$ hat Dezimaldarstellung $\underbrace{11\cdots1}_{\ell}\underbrace{33\cdots3}_{k}$

Achtung: Binäre Kodierung der Eingabe wichtig!

T3.12

NP-Vollständigkeit

NP-vollständige Probleme finden sich auch im täglichen Leben:

- **Minesweeper:** Gegeben den momentanen Stand eines Spiels (mit Brett beliebiger Größe), ist an einer bestimmten (verdeckten) Stelle mit Sicherheit eine Mine versteckt?
- **Sudoku:** Gegeben ein partiell gelöstes Sudoku, kann es zu einem vollständig gelösten erweitert werden?
- **Bundesliga:** Gegeben den momentanen Punktestand der Bundesliga (mit beliebig vielen Mannschaften), kann eine bestimmte Mannschaft noch Meister werden?
- …

Kapitel 3

Motivation

Sei $\overline{\text{3F}}$ die Menge aller nicht 3-färbbaren Graphen.

In welcher Komplexitätsklasse ist $\overline{\text{3F}}$?

- Wenn $\overline{\text{3F}}$ in NP ist, müsste es polynomielles Beweissystem geben.

  Aber was ist polynomieller Beweis dafür, dass Graph nicht 3-färbbar?
  Menge aller möglichen 3-Färbungen? Exponentiell viele!

- Offensichtlich ist $\overline{\text{3F}}$ ein Problem, bei dem es kurze und einfach zu verifizierende Beweise für nein-Instanzen gibt statt für ja-Instanzen.

Komplemente von Problemen

Definition Komplement (Problem)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Problem. Das *Komplement* von L ist $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$.

Beispiele:

- $\overline{\text{3F}}$
- $\overline{\text{SAT}}$ (Menge aller unerfüllbaren AL-Formeln)
- $\overline{\text{CLIQUE}}$ (Menge aller Paare (G, k), so dass G keine k-Clique hat)

Deterministische Zeitkomplexitätsklassen wie z. B. P sind unter Komplement abgeschlossen:

Lemma

Sei $\mathcal{C} = \text{DTime}(t)$ für beliebiges t. Dann gilt: $L \in \mathcal{C}$ impliziert $\overline{L} \in \mathcal{C}$.

T3.13

Also z. B. für GAP (Erreichbarkeitsproblem auf gerichteten Graphen): $\overline{\text{GAP}} \in$ P

Komplement-Komplexitätsklassen

Argument aus dem letzten Beweis schlägt fehl für nichtdeterministische TMs, funktioniert also nicht für die alternative Charakterisierung von NP!

Definition Komplement-Komplexitätsklasse

Sei $\mathcal{C}$ Komplexitätsklasse. $\text{co}\mathcal{C} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$

Wir interessieren uns hier insbesondere für die **Klasse coNP.**

Z. B. sind $\overline{\text{3F}}$, $\overline{\text{SAT}}$, $\overline{\text{CLIQUE}}$ per Definition in coNP.

Weiteres natürliches coNP-Problem:

Definition Gültigkeit in Aussagenlogik

AL-Formel φ ist *gültig* gdw. jede Belegung φ erfüllt.

Lemma

Gültigkeit ist in coNP.

T3.14

coNP-Vollständigkeit

Härte und Vollständigkeit sind definiert wie für NP:

Definition coNP-Härte, coNP-Vollständigkeit

Ein Problem L ist

- *coNP-hart*, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in$ coNP;
- *coNP-vollständig*, wenn L coNP-hart und in coNP.

Lemma

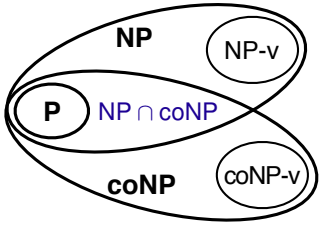
L ist NP-hart gdw. $\overline{L}$ coNP-hart.

$\overline{\text{3F}}, \overline{\text{SAT}}, \overline{\text{CLIQUE}}$ etc. sind also coNP-vollständig. **T3.15**

Lemma

Gültigkeit ist coNP-vollständig. **T3.16**

P versus NP versus coNP



Leicht zu sehen:

P ⊆ coNP **T3.17**

Es wird vermutet:

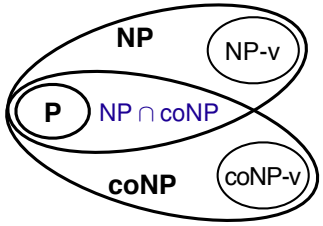
1. NP ≠ coNP
2. NP ∩ coNP ≠ P

Beide Vermutungen implizieren P ≠ NP:

Wenn P = NP, dann P = NP = coNP (Abschluss P unter Komplement)

Die umgekehrte Implikation ist nicht bekannt.

NP ∩ coNP



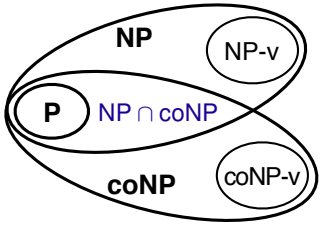
Damit ergibt sich NP ∩ coNP als weitere interessante Klasse.

NP: kurze/einfach zu verifizierende Beweise für ja-Instanzen

coNP: kurze/einfach zu verifizierende Beweise für nein-Instanzen

NP ∩ coNP: beides ist der Fall

NP ∩ coNP



Ein bekanntes Problem in NP ∩ coNP:

Definition Integer-Faktorisierung

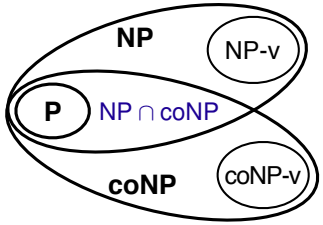
Integer-Faktorisierung (IF) ist das folgende Problem:

Gegeben $n, k \in \mathbb{N}$, entscheide, ob n einen Faktor $\leq k$ hat.

Theorem

IF $\in$ NP ∩ coNP **T3.18**

NP ∩ coNP und NP-Vollständigkeit



Probleme in NP ∩ coNP sind ...

- wahrscheinlich nicht NP-vollständig:

  Lemma

  Wenn es ein NP-vollständiges $L \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ gibt, dann $\text{NP} = \text{coNP}$.

  T3.19

  Kryptographie mit dem RSA-Verfahren ist nicht sicher, wenn $\text{IF} \in \text{P}$ (denn mit binärer Suche ließen sich dann effizient Faktoren finden).

- natürliche Kandidaten für NP-intermediate Probleme (siehe Satz von Ladner)

Übersicht Vorlesung