Dr. Stefan Göller Wintersemester 2012/2013

Logik

Aufgabenblatt 1

Besprechung und Abgabe: 30.10.2012

---

1. (35%=15%+10%+5%+5%) Johanna und Joel haben fünf Kinder: Anna, Bert, Chris, David und Eva. Gegeben sind die sechs folgenden Aussagen:

1. Eva sagt: „Unter den Personen Anna, Chris und David befindet sich mindestens ein Lügner."
2. Anna sagt: „Bert lügt nur dann, wenn David die Wahrheit sagt."
3. Bert sagt: „Wenn Chris nicht lügt, dann ist entweder Anna oder David ein Lügner."
4. Chris sagt: „Eva lügt, und auch Anna oder Bert lügen."
5. David sagt: „Wenn Bert die Wahrheit sagt, dann auch Anna oder Chris."
6. Zwei der Kinder lügen immer, die anderen drei sagen immer die Wahrheit.

Aus der Rätselbeschreibung kann man bereits eindeutig feststellen, wer von den Kindern die Lügner sind. Wir wollen das Rätsel hier mit Hilfe von Aussagenlogik lösen.

a) Gib aussagenlogische Formeln $F_1, ..., F_6$ an, die die beschriebene Situation modellieren (für jede Aussage eine Formel)! Verwende für jedes Kind eine aussagenlogische Variable, die angibt, ob das entsprechende Kind lügt, d.h. eine Variable x_a für die Aussage „Anna ist eine Lügnerin". Hinweis: Die Aussage „Anna sagt, dass Bert ein Lügner ist" kann durch folgende aussagenlogische Formel beschrieben werden: $(x_a \rightarrow \neg x_b) \wedge (\neg x_a \rightarrow x_b)$

b) Wieviele erfüllende Belegungen hat die Formel F_6? Geben Sie alle an!

c) Geben Sie eine Belegung V an, die alle Formeln $F_1, \ldots, F_6$ zu 1 auswertet! In welcher Beziehung steht V zu der Lösung des Rätsels?

d) Gibt es weitere Belegungen, die alle Formeln zu 1 auswerten? Was folgt daraus über die Eindeutigkeit der Lösung?

2. (10%=5%+5%) Bezeichne $f_{\mathsf{Nand}} \in \mathcal{B}_2$ die zugrundeliegende Boolesche Funktion des Junktors $|$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden beiden Aussagen:

a) f_{Nand} ist kommutativ.

b) f_{Nand} ist assoziativ.

3. (15%=3·5%) Zeigen Sie durch Anwenden und Angabe der in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzen, dass die folgenden Äquivalenzen gelten:

a) $0 \wedge x \equiv 0$ und $1 \vee x \equiv 1$

b) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \equiv y$

c) $\neg((\neg x \vee y) \wedge x) \equiv \neg x \vee \neg y$

4. (10%) Zeigen Sie $|\mathcal{B}_n| = 2^{2^n}$ für alle $n \geq 0$.

5. (30%=3·10%) Gegeben sei die folgende 3-stellige Boolesche Funktion f mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 1 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ in disjunktiver Normalform an mit $f_\varphi = f$.

b) Sei $M = \{f, 0, 1\}$. Zeigen Sie, dass M funktional vollständig ist.

c) Zeigen Sie, dass jede echte Teilmenge von M nicht funktional vollständig ist.