Dr. Stefan Göller Wintersemester 2012/2013

Logik

Aufgabenblatt 2

Besprechung und Abgabe: 13.11.2012

---

1. (10%) Zeigen Sie: Eine KNF-Formel ist genau dann gültig, wenn jedes Konjunkt zwei Literale der Form x, $\neg x$ enthält.

2. (25%=5×5%) Beweisen Sie die folgenden Aussagen! Verwenden Sie dabei die Definition von "$\models$" und die Semantik der Junktoren.

a) $\psi \wedge (\psi \to \phi) \models \phi$

b) Wenn $\phi \wedge \psi \models \vartheta$ und $\phi \wedge \neg\psi \models \vartheta$, dann gilt $\phi \models \vartheta$.

c) $\phi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\phi \to \psi$ gültig ist.

d) Wenn $\phi \models \psi$ und $\phi \models \neg\psi$, dann ist ϕ unerfüllbar.

e) ϕ ist gültig genau dann, wenn $1 \models \phi$.

3. (20%=10%+10%)

a) Wenden Sie Resolution an, um für die folgende Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist:

$$(x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Geben Sie im Fall von Unerfüllbarkeit einen Resolutionsbeweis für $\Box$ an.

b) Verwenden Sie den Polynomialzeitalgorithmus für Erfüllbarkeit von Hornformeln um festzustellen, ob die Formel

$$x_1 \wedge (x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \wedge x_4 \to x_3) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \to 0) \wedge x_4$$

erfüllbar ist. Verifiziere dein Ergebnis durch Berechnen von $\mathrm{ERes}^*(M)$ für eine geeignete Klauselmenge M.

4. (15%) Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der folgendes berechnet:

EINGABE: Eine AL-Formel φ.

AUSGABE: Eine AL-Formel ψ so, dass die folgendne beiden Aussagen äquivalent sind:

- Die Formel φ ist gültig.
- Es gibt eine Horn-Formel ϑ so dass $\vartheta \equiv \psi$.

5. (30%=15%+15%)

a) Geben Sie eine Familie von von Hornklauseln $(M_n)_{n\geq 1}$ so, dass $|M_n|$ höchstens polynomiell in n wächst, $|\mathrm{ERes}^*(M_n)|$ jedoch nicht polynomiell in n wächst.

b) Um einen Polynomialzeitalgorithmus aus dem Resolutionssatz für Einheitsresolution abzuleiten, modifizieren wir die Funktion ERes. Dafür legen wir eine lineare Ordnung $<$ auf den Variablen fest, d.h. $x_1 < x_2 < \ldots$. Eine Klausel C ist eine *minimale Einheitsresolvente von* M, wenn

- sie eine Einheitsresolvente von zwei Klauseln C_1, C_2 aus M ist mit $C_1 = \{x_i\}$ und
- es gibt kein $\neg x_j \in C_2$ mit $x_j < x_i$

Wir definieren nun die Funktion OERes durch

$$\mathrm{OERes}(M) := M \cup \{C \mid C \text{ minimale Einheitsresolvente von } M\}$$

und definieren $\mathrm{OERes}^i(M)$ sowie $\mathrm{OERes}^*(M)$ analog zu $\mathrm{Res}^i(M)$ und $\mathrm{Res}^*(M)$ aus der Vorlesung. Man kann leicht zeigen, dass der Resolutionssatz für Einheitsresolution auch für die modifizierte Funktion OERes^* gilt.

Zeigen Sie nun, dass $|\mathrm{OERes}^*(M)|$ polynomiell von $|M|$ abhängt und dass auch die Berechnung von $\mathrm{OERes}^*(M)$ in Polynomialzeit möglich ist.