

# Logik

## Aufgabenblatt 4

*Besprechung und Abgabe: 13.12.2012*

---

1. (25%) Das *Spektrum* eines  $\text{FO}(\tau)$ -Satzes  $\varphi$  ist die Menge aller natürlichen Zahlen  $n$ , sodass  $\varphi$  ein Modell mit einem Universum der Größe  $n$  besitzt.
  - a) Zeige:
    - $\emptyset$  und  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  sind jeweils das Spektrum eines  $\text{FO}(\emptyset)$ -Satzes
    - Jede endliche Menge ist Spektrum eines  $\text{FO}(\emptyset)$ -Satzes.
    - Jede co-endliche Menge ist Spektrum eines  $\text{FO}(\emptyset)$ -Satzes ( $A$  co-endlich gdw.  $\mathbb{N} \setminus A$  endlich)
  - b) Gib einen Satz über der Signatur  $\tau = \{R\}$ , wobei  $R$  ein zweistelliges Relationssymbol ist, an, dessen Spektrum die Menge der geraden Zahlen ist.
  
2. (25%) Wir betrachten eine Datenbank mit den Relationen “Film”, “Schauspieler” und “Programm”. Dabei soll Film die Attribute (Name, Jahr, Regisseur) haben, Schauspieler die Attribute (Film, Schauspieler) und Programm die Attribute (Film, Kino, Uhrzeit). Eine Beispielinstantz dieser Signatur ist hier zu sehen:

Name	Jahr	Regisseur
The Social Network	2010	David Fincher
...		
Film		Schauspieler
The Social Network		Jesse Eisenberg
The Social Network		Justin Timberlake
...		
Film	Kino	Uhrzeit
The Social Network	Cinemaxx	16:00
The Social Network	Schauburg	20:15
...		

Formuliere FO-Formeln (mit freien Variablen), die folgende Antwortmengen liefern:

- a) Regisseure, die auch Schauspieler sind.
- b) Regisseure, die in ihren eigenen Filmen mitgespielt haben.
- c) Filme, die in mindestens zwei Kinos gezeigt werden.
- d) die Regisseure von "The Social Network"
- e) alle Filme, die im Cinemaxx gezeigt werden und deren Regisseur David Fincher ist oder in denen Jesse Eisenberg mitspielt.

Formuliere zusätzlich einen FO-Satz, der genau dann zu 1 auswertet, wenn es ein Kino gibt, das sowohl einen Film von Hitchcock als auch einen Film von Spielberg zeigt.

3. (25%) Eine Signatur heißt *algebraisch*, falls sie nur Funktionssymbole (und keine Relationssymbole) enthält. Zeige, dass das Erfüllbarkeitsproblem auch auf algebraischen Signaturen unentscheidbar ist, indem du die folgende Behauptung beweist:

Jede FO-Formel  $\phi$  kann in eine FO-Formel  $\phi'$  ohne Relationssymbole umgeformt werden, sodass  $\phi'$  genau dann erfüllbar ist, wenn  $\phi$  erfüllbar ist.

4. (25%= 5% $\times$ 5%) Beweise oder widerlege:

- a) Wenn  $T_1$  und  $T_2$  FO-Theorien sind, dann ist auch  $T_1 \cup T_2$  eine FO-Theorie.
- b) Wenn  $T_1$  und  $T_2$  FO-Theorien sind, dann ist auch  $T_1 \cap T_2$  eine FO-Theorie.
- c) Wenn  $T$  eine FO-Theorie ist, dann ist auch  $\{\neg\varphi \mid \varphi \in T\}$  eine FO-Theorie.
- d) Wenn  $T$  eine vollständige Theorie ist, dann ist  $\varphi \vee \psi \in T$  genau dann, wenn  $\varphi \in T$  oder  $\psi \in T$ .
- e) Sei  $T$  eine beliebige FO-Theorie. Dann gilt  $\forall x.x = x \in T$ .