

Automatentheorie und ihre Anwendungen

Teil 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern

Wintersemester 2018/19

Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

<http://tinyurl.com/ws1819-autom>

Vorlesungsübersicht

Kapitel 1: endliche Automaten auf endlichen Wörtern

Kapitel 2: endliche Automaten auf endlichen Bäumen

Kapitel 3: endliche Automaten auf unendlichen Wörtern

Kapitel 4: endliche Automaten auf unendlichen Bäumen

Ziel dieses Kapitels

- Wiederholung der Definitionen & Resultate zu endlichen Automaten aus „Theoretische Informatik 1“
- Kennenlernen zweier Anwendungen endlicher Automaten

Überblick

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche*
- 3 Abschlusseigenschaften
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
- 5 Charakterisierungen
- 6 Entscheidungsprobleme

Und nun ...

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche*
- 3 Abschlusseigenschaften
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
- 5 Charakterisierungen
- 6 Entscheidungsprobleme

Wörter, Sprachen, ...

- **Symbole** a, b, \dots
- **Alphabet** Σ : endliche nichtleere Menge von Symbolen
- **(endliches) Wort** w über Σ :
endliche Folge $w = a_1 a_2 \dots a_n$ von Symbolen $a_i \in \Sigma$
- **leeres Wort** ε
- **Wortlänge** $|a_1 a_2 \dots a_n| = n, \quad |\varepsilon| = 0$
- **Menge aller Wörter** über Σ : Σ^*
- **Sprache** L über Σ : Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern
- **Sprachklasse** \mathcal{L} : Menge von Sprachen

Endliche Automaten

Definition 1.1

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** über einem Alphabet Σ ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, wobei

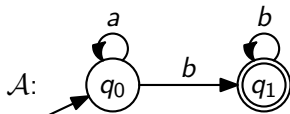
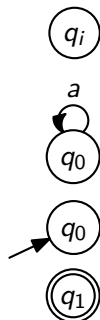
- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
 - Σ ein Alphabet ist,
 - $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die **Überföhrungsrelation** ist, (*)
 - $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
 - $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.
-
- (*) bedeutet:
 Δ besteht aus Tripeln (q, a, q') mit $q, q' \in Q$ und $a \in \Sigma$
 - $(q, a, q') \in \Delta$ bedeutet intuitiv:
ist \mathcal{A} in Zustand q und liest ein a , geht er in Zustand q' über.

Beispiel und graphische Repräsentation von NEAs

Betrachte $\mathcal{A} =$

$(\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{(q_0, a, q_0), (q_0, b, q_1), (q_1, b, q_1)\}, \{q_0\}, \{q_1\})$

- Zustände: q_0, q_1
- Alphabet $\{a, b\}$
- Übergänge: von q_0 mittels a zu q_0, \dots
- Anfangszustand q_0
- einziger akzeptierender Zustand q_1



Berechnungen und Akzeptanz

Definition 1.2

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

- Ein **Run** von \mathcal{A} auf $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ist eine Folge

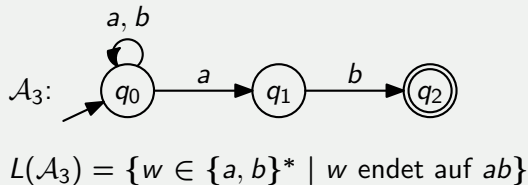
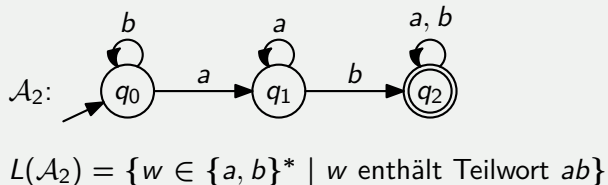
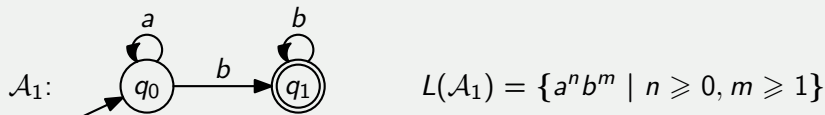
$$r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n,$$

so dass für alle $i = 0, \dots, n - 1$ gilt: $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$.

Man sagt/schreibt: w **überführt** q_0 in q_n , $q_0 \vdash_{\mathcal{A}}^w q_n$

- Ein Run $r = q_0 q_1 q_2 \dots q_n$ von \mathcal{A} auf w ist **erfolgreich**, wenn $q_0 \in I$ und $q_n \in F$.
- \mathcal{A} **akzeptiert** w , wenn es einen erfolgreichen Run von \mathcal{A} auf w gibt.
- Die von \mathcal{A} **erkannte Sprache** ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

Beispiele



Erkennbare Sprache

Definition 1.3

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **(NEA-)erkennbar**, wenn es einen NEA \mathcal{A} gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

Determinismus

Definition 1.4

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein NEA.

Enthält Δ für jedes $q \in Q$ u. jedes $a \in \Sigma$ **genau 1** Tripel (q, a, q')
und enthält I **genau 1** Zustand,

dann ist \mathcal{A} ein **deterministischer endlicher Automat (DEA)**.

↪ Nachfolgezustand für jedes Paar (q, a) eindeutig bestimmt

- Jeder DEA ist ein NEA,
aber nicht umgekehrt (z. B. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ auf Folie 10).
- Auf Folie 10 ist nur \mathcal{A}_2 ein DEA;
 \mathcal{A}_1 kann mittels *Papierkorbzustand* zum DEA werden; **T 1.1**
bei \mathcal{A}_3 genügt auch das nicht.

Potenzmengenkonstruktion

Frage: Sind DEAs und NEAs gleichmächtig?

Antwort: Ja!

Satz 1.5 (Rabin, Scott 1959)

Für jeden NEA \mathcal{A} gibt es einen DEA \mathcal{A}^d mit $L(\mathcal{A}^d) = L(\mathcal{A})$.

Beweisskizze: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$.

Wir konstruieren $\mathcal{A}^d = (Q^d, \Sigma, \Delta^d, I^d, F^d)$ wie folgt.

- $Q^d = 2^Q$ (Potenzmenge der Zustandsmenge)
- $I^d = \{I\}$
- $(S, a, S') \in \Delta^d$ gdw. $S' = \{q' \mid \exists q \in S : (q, a, q') \in \Delta\}$
- $F^d = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$ T 1.2

Im schlimmsten Fall kann \mathcal{A}^d im Vergleich zu \mathcal{A} exponentiell viele Zustände haben (s. Hopcroft et al. 2001, S. 65).

Und nun ...

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche***
- 3 Abschlusseigenschaften
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
- 5 Charakterisierungen
- 6 Entscheidungsprobleme

Stichwortsuche

Typisches Problem aus dem Internetzeitalter

Gegeben sind **Stichwörter** $w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*$
und **Dokumente** $D_1, \dots, D_M \in \Sigma^*$.

Finde alle j , so dass D_j mindestens ein (alle) w_i als Teilwort hat.

- relevant z.B. für **Suchmaschinen**
- übliche Technologie: **invertierter Index**
speichert für jedes im Internet auftretende w_i
eine Liste aller Dokumente D_j , die w_i enthalten
- invertierte Indizes sind zeitaufwändig zu erstellen
und setzen voraus, dass die D_j sich nur langsam ändern

Stichwortsuche ohne invertierte Indizes?

Invertierte Indizes versagen, wenn

- die (relevanten) Dokumente sich schnell ändern:
 - Suche in tagesaktuellen Nachrichtenartikeln
 - Einkaufshelfer sucht nach bestimmten Artikeln in aktuellen Seiten von Online-Shops
- die Dokumente nicht katalogisiert werden können:
 - Online-Shops wie Amazon generieren oft Seiten für ihre Artikel nur auf Anfragen hin.

↪ Wie kann man dennoch Stichwortsuche implementieren?

Ein Fall für endliche Automaten!

Gegeben sind **Stichwörter** $w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*$
und **Dokumente** $D_1, \dots, D_M \in \Sigma^*$.

Finde alle j , so dass D_j mindestens ein w_i als Teilwort hat.

Ziel: konstruiere NEA \mathcal{A} , der

- ein D_j zeichenweise liest und
- in einen Endzustand geht gdw. er eins der w_i findet

Der Einfachheit halber legen wir fest, dass \mathcal{A} ein Wort w akzeptiert, wenn \mathcal{A} bereits nach Lesen eines *Teilworts* einen akz. Zustand erreicht.

Beispiel 1.6

$w_1 = \text{web}$ und $w_2 = \text{ebay}$

Implementation des NEAs \mathcal{A}

Eine Möglichkeit:

- 1 Determinisierung (Potenzmengenkonstruktion)
- 2 Simulation des resultierenden DEA \mathcal{A}^d

Wird \mathcal{A}^d nicht zu groß?

($2^{27} > 134$ Mio. Zustände bei Stichw. „Binomialkoeffizient“, „Polynom“)

Nein,

- mit der leicht geänderten Definition von Akzeptanz
- und unserer Variante der Potenzmengenkonstruktion

wird \mathcal{A}^d genauso viele Zustände haben wie \mathcal{A} !

T 1.4

Und nun ...

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche*
- 3 Abschlusseigenschaften**
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
- 5 Charakterisierungen
- 6 Entscheidungsprobleme

Operationen auf Sprachen sind Operationen auf Mengen

Wie können (NEA-erkennbare) Sprachen kombiniert werden?

- Boolesche Operationen

Vereinigung $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$

Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$

Komplement $\bar{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$

- Wortoperationen

Konkatenation $L_1 \cdot L_2 = \{vw \mid v \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$

Kleene-Hülle $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$

wobei $L^0 = \{\varepsilon\}$ und $L^{i+1} = L^i \cdot L$ für alle $i \geq 0$

Abgeschlossenheit

Die Menge der erkennbaren Sprachen heißt **abgeschlossen unter** . . .

- **Vereinigung**, falls gilt:
Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cup L_2$.
- **Komplement**, falls gilt:
Falls L erkennbar, so auch \bar{L} .
- **Schnitt**, falls gilt:
Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cap L_2$.
- **Konkatenation**, falls gilt:
Falls L_1, L_2 erkennbar, so auch $L_1 \cdot L_2$.
- **Kleene-Stern**, falls gilt:
Falls L erkennbar, so auch L^* .

Unter welchen Op. sind die NEA-erkennbaren Sprachen abgeschlossen?

Abgeschlossenheit

Satz 1.7

Die Menge der NEA-erkennbaren Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen \cup , \cap , $\bar{}$, \cdot , $*$.

Beweis: Siehe Th1 1.

Und nun ...

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche*
- 3 Abschlusseigenschaften
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen***
- 5 Charakterisierungen
- 6 Entscheidungsprobleme

Reguläre Ausdrücke und Anwendungen

Reguläre Ausdrücke sind ...

- bequeme Charakterisierung NEA-erkennbarer Sprachen
- besonders praktisch für Anwendungen

Reguläre Sprachen

Definition 1.8

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **regulär**, falls gilt:

- $L = \emptyset$ oder
- $L = \{\varepsilon\}$ oder
- $L = \{a\}$, $a \in \Sigma$, oder
- L lässt sich durch (endlichmaliges) Anwenden der Operatoren $\cup, \cdot, *$ aus den vorangehenden Fällen konstruieren.

Beispiele:

$(\{a\} \cup \{b\})^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}$ (siehe \mathcal{A}_3 auf Folie 10)

$\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot (\{a\} \cup \{b\})^*$ (s. \mathcal{A}_2 auf Folie 10)

Reguläre Ausdrücke

Definition 1.9

Ein **regulärer Ausdruck (RA)** r über Σ und die **zugehörige Sprache** $L(r) \subseteq \Sigma^*$ werden induktiv wie folgt definiert.

- $r = \emptyset$ ist ein RA mit $L(r) = \emptyset$
- $r = \varepsilon$ ist ein RA mit $L(r) = \{\varepsilon\}$
- $r = a$, für $a \in \Sigma$, ist ein RA mit $L(r) = \{a\}$
- $r = (r_1 + r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $r = (r_1 r_2)$ ist ein RA mit $L(r) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $r = (r_1)^*$ ist ein RA mit $L(r^*) = (L(r))^*$

Beispiele: (wir lassen Klammern weg soweit eindeutig)

$(a + b)^* ab$ (siehe \mathcal{A}_3 auf Folie 10)

$b^* aa^* b(a + b)^*$ (siehe \mathcal{A}_2 auf Folie 10)

Reguläre und NEA-erkennbare Sprachen

Satz 1.10 (Kleene 1956)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

- 1 L ist regulär gdw. es einen RA r gibt mit $L = L(r)$.
- 2 L ist regulär gdw. L NEA-erkennbar ist.

Beweis.

- 1 Folgt offensichtlich aus Def. 1.8, 1.9.
- 2 Benutze Punkt 1.

„ \Rightarrow “: Induktion über Aufbau von r .

IA: gib Automaten an, die \emptyset , $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$ erkennen.

IS: benutze Abschlusseigenschaften (Satz 1.7)

„ \Leftarrow “: siehe Theoretische Informatik 1. □

Anwendungen regulärer Ausdrücke

- RAs werden verwendet, um „Muster“ von zu suchendem Text zu beschreiben.

z. B.: suche alle Vorkommen von „PLZ Ort“:

$$(0 + \dots + 9)^5 \sqcup (A + \dots + Z)(a + \dots + z)^*$$

- Programme zum Suchen von Mustern im Text übersetzen RAs in NEAs/DEAs und simulieren diese.
- wichtige Klassen von Anwendungen:
lexikalische Analyse, Textsuche

Komfortablere Syntax regulärer Ausdrücke

- UNIX und andere Anwendungen erweitern Syntax von RAs
- Hier: nur „syntaktischer Zucker“ – die Erweiterungen, die nicht aus den regulären Sprachen herausführen
- Alphabet Σ : alle ASCII-Zeichen
- RA \cdot mit $L(\cdot) = \Sigma$
- RA $[a_1 a_2 \dots a_k]$, Abkürzung für $a_1 + a_2 + \dots + a_k$
- RAs für Bereiche: z. B. $[a-z0-9]$, Abkü. für $[ab\dots z01\dots 9]$
- Operator $|$ anstelle $+$
- Operator $?$: $r?$ steht für $\varepsilon + r$
- Operator $+$: $r+$ steht für rr^*
- Operator $\{n\}$: $r\{5\}$ steht für $rrrrr$
- Klammern und $*$ wie gehabt

PLZ-Ort-Beispiel:

$[0-9]\{5\} \sqcup [A-Z][a-z]^*$

Anwendung: lexikalische Analyse

- **Lexer** (auch: Tokenizer) durchsucht Quellcode nach **Token**: zusammengehörende Zeichenfolgen, z. B. Kennwörter, Bezeichner
- Ausgabe des Lexers: Token-Liste, wird an Parser weitergegeben
- Mit RAs: Lexer leicht programmier- und modifizierbar
- UNIX-Kommandos `lex` und `flex` generieren Lexer
 - Eingabe: Liste von Einträgen RA + Code
 - Code beschreibt Ausgabe des Lexers für das jeweilige Token
 - generierter Lexer wandelt alle RAs in **einen DEA** um, um Vorkommen der Tokens zu finden (siehe Folie 17)
 - anhand des Zustands des DEAs lässt sich bestimmen, *welches* Token gefunden wurde

Beispieleingabe für lex

```
else
  {return(ELSE);}

[A-Za-z][A-Za-z0-9]*
  {<Trage gefundenen Bezeichner in Symboltabelle ein>;
  return(ID);}

>=
  {return(GE);}

=
  {return(EQ);}
```

(Lexer-Generator muss Prioritäten beachten:
else wird auch vom 2. RA erkannt, ist aber reserviert)

Anwendung: Finden von Mustern im Text

Beispiel: Suchen von Adressen (Str. + Hausnr.) in Webseiten

Solche Angaben sollen gefunden werden:

Parkstraße 5

Enrique-Schmidt-Straße 12a

Breitenweg 24A

Knochenhauergasse 30-32

aber auch solche:

Straße des 17. Juni 17

...boulevard, ...allee, ...platz, ...

Postfach 330 440

Am Wall 8

- ↪ Ausmaß der Variationen erst während der Suche deutlich
- ↪ Gesucht: einfach modifizierbare Beschreibung der Muster

Mustersuche mit regulären Ausdrücken

Mögliches Vorgehen:

- (1) Beschreibung des Musters mit einem einfachen RA
- (2) Umwandlung des RA in einen NEA
- (3) Implementation des DEA wie auf Folie 17+18
- (4) Test
- (5) Wenn nötig, RA erweitern/ändern und Sprung zu Schritt 2

Adresssuche mit regulären Ausdrücken

So kann sich der RA entwickeln:

- Vorkommen von „straße“ etc.:¹
 $\text{straße} | \text{str} \backslash . | \text{weg} | \text{gasse}$
- Plus Name der Straße und Hausnummer:
 $[A-Z] [a-z]^* (\text{straße} | \text{str} \backslash . | \text{weg} | \text{gasse}) [0-9]^*$
- Hausnummern mit Buchstaben (12a), -bereiche (30–32):
 $[A-Z] [a-z]^* (\text{straße} | \text{str} \backslash . | \text{weg} | \text{gasse})$
 $([0-9]^* [A-Za-z]? -)? [0-9]^* [A-Za-z]^?$
- und mehr:
 - Straßennamen mit Bindestrichen
 - „Straße“ etc. am Anfang
 - Plätze, Boulevards, Alleen etc.
 - Postfächer
 - ...

¹Weil der UNIX-RA $.$ für Σ reserviert ist, steht $\backslash .$ für $\{.\}$

Und nun ...

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche*
- 3 Abschlusseigenschaften
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
- 5 Charakterisierungen**
- 6 Entscheidungsprobleme

Pumping-Lemma

Wie zeigt man, dass L **nicht** NEA-erkennbar (regulär) ist?

Satz 1.11 (Pumping-Lemma)

Sei L eine NEA-erkennbare Sprache.

Dann gibt es eine Konstante $p \geq 0$,
so dass für alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq p$ gilt:

Es gibt eine Zerlegung $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq p$,
so dass $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beweis: siehe Thl 1.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Benutzen Kontraposition:

Wenn es **für alle** Konstanten $p \geq 0$
ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq p$ **gibt**, so dass es
für alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq p$
ein $i \geq 0$ **gibt** mit $xy^i z \notin L$,
dann ist L **keine** NEA-erkennbare Sprache.

T 1.5

Bemerkungen zum Pumping-Lemma

Die Bedingung in Satz 1.11 ist ...

- **notwendig** dafür, dass L NEA-erkennbar ist
- **nicht hinreichend**

$$\text{Bsp.: } \{a^n b^k c^k \mid n, k \geq 1\} \cup \{b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$$

↪ Pumping-L. nur zum **Widerlegen** von Erkennbarkeit verwendbar,
nicht zum Beweisen, dass L regulär ist

(Notwendige und hinreichende Variante: Jaffes Pumping-Lemma)

Der Satz von Myhill-Nerode

Ziel: notwendige **und** hinreichende Bedingung für Erkennbarkeit

Definition 1.12

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache.

Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ sind **L -äquivalent** (Schreibweise: $u \sim_L v$), wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$uw \in L \quad \text{genau dann, wenn} \quad vw \in L$$

\sim_L heißt **Nerode-Rechtskongruenz** und ist Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie, Transitivität sind offensichtlich)

Index von \sim_L : Anzahl der Äquivalenzklassen

Der Satz von Myhill-Nerode

Satz 1.13 (Myhill-Nerode)

$L \subseteq \Sigma^*$ ist NEA-erkennbar gdw. \sim_L endlichen Index hat.

Beweis: siehe Th11.

T 1.6

Interessantes „**Nebenprodukt**“ des Beweises:

Endlicher Index n von \sim_L

= minimale Anzahl von Zuständen in einem DEA, der L erkennt.

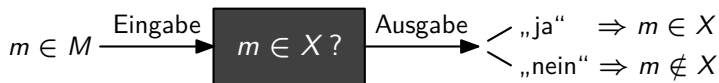
Und nun ...

- 1 Grundbegriffe
- 2 *Anwendung: Textsuche*
- 3 Abschlusseigenschaften
- 4 Reguläre Ausdrücke und *Anwendungen*
- 5 Charakterisierungen
- 6 Entscheidungsprobleme**

Entscheidbarkeit

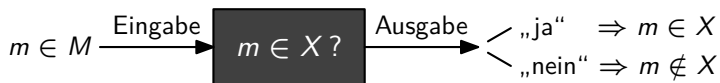
(Entscheidungs-)Problem

- ... ist eine Teilmenge $X \subseteq M$
 - Eingabe: $m \in M$; Frage: $m \in X$?
 - $m \in X$: **Ja-Instanzen**; $m \in M \setminus X$: **Nein-Instanzen**
- Beispiele:
 - $X =$ Menge aller Primzahlen, $M = \mathbb{N}$
 - $X =$ Menge aller NEAs \mathcal{A} mit $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$,
 $M =$ Menge aller NEAs
- man stelle sich eine Blackbox vor:



Entscheidbarkeit: X ist entscheidbar,
wenn es einen Algorithmus A gibt, der die Blackbox implementiert.

Komplexität



Komplexität:

zusätzliche Anforderungen an Zeit-/Speicherplatzbedarf von A

- **Polynomialzeit:** Anzahl Rechenschritte von A ist $\leq |m|^k$,
 $|m|$: Länge der Eingabe; k : beliebige Konstante
- **Polynomieller Platz:** von A benötigter Speicherplatz $\leq |m|^k$
- **Exponentialzeit:** Anzahl Rechenschritte von A ist $\leq 2^{|m|^k}$
- ...

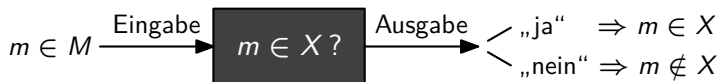
Einige übliche Komplexitätsklassen

Name	Bedeutung	Beispiel-Problem
L	logarithm. Speicherplatz	Erreichbarkeit, ungerichtete Graphen
NL	nichtdetermin. log. Platz	Erreichbarkeit, gerichtete Graphen
P	Polynomialzeit	Primzahlen

NP	nichtdeterminist. Polyzeit	Erfüllbarkeit Aussagenlogik
PSpace	polynom. Speicherplatz	Erfüllbarkeit QBF
ExpTime	Exponentialzeit	Gewinnstrategie $n \times n$ -Schach
NExpTime	nichtdet. Exponentialzeit	Clique f. schaltkreisodierte Graphen
ExpSpace	exponentieller Platz	Äquiv. regulärer Ausdrücke mit „ \cdot^2 “
⋮	⋮	
	unentscheidbar	Erfüllbarkeit Prädikatenlogik

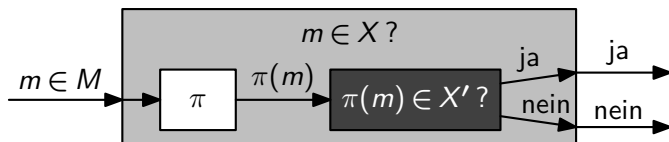
Komplementklassen: **coNL**, **coNP** etc.

Reduktion



(Polynomielle) Reduktion von $X \subseteq M$ nach $X' \subseteq M'$
 ist eine (in Polyzeit) berechenbare Funktion $\pi : M \rightarrow M'$ mit

$$m \in X \quad \text{gdw.} \quad \pi(m) \in X'$$



Schreibweise: $X \leq X'$ bzw. $X \leq_p X'$ (X auf X' **reduzierbar**) **T 1.7**

Wenn alle Probleme aus Komplexitätsklasse \mathcal{C} auf X **reduzierbar**,
 dann ist X **schwer für \mathcal{C}** .

Bestimmung der Komplexität

Normalerweise zeigt man, dass ein Problem $X \subseteq M \dots$

- **in** einer Komplexitätsklasse \mathcal{C} liegt, indem man
 - einen Algorithmus A findet, der X löst
 - zeigt, dass A korrekt ist (*ja/nein*-Antworten) und terminiert
 - zeigt, dass A für jedes $m \in M$ **höchstens** die \mathcal{C} -Ressourcen braucht

... A kann z. B. eine Reduktion zu einem Problem aus \mathcal{C} sein
- **schwer (hard) für** \mathcal{C} ist, indem man
 - ein Problem $X' \subseteq M'$ findet, dass **schwer für** \mathcal{C} ist
 - und eine Reduktion von X' nach X angibt
- **vollständig für** \mathcal{C} ist, indem man zeigt, dass es
 - **in** \mathcal{C} liegt und
 - **schwer für** \mathcal{C} ist

Entscheidungsprobleme für endliche Automaten

- Betrachten wesentliche Eigenschaften von Sprachen (Sprachen repräsentiert durch NEAs oder reguläre Ausdr.)
 - Ist eine gegebene Sprache leer?
 - Ist ein gegebenes Wort w in einer Sprache L ?
 - Beschreiben zwei Repräsentationen einer Sprache tatsächlich dieselbe Sprache?
- Wichtig für Anwendungen (siehe Einführung)
- Art der Repräsentation spielt manchmal eine Rolle: NEA, DEA, regulärer Ausdruck, Typ-3-Grammatik etc.
Wir betrachten im Folgenden **NEAs und DEAs**.

Das Leerheitsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) \mathcal{A}

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

d. h. $LP_{NEA} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA, } L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$,

$LP_{DEA} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA, } L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$

Satz 1.14

LP_{NEA} und LP_{DEA} sind entscheidbar und **coNL**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe Th1.1
- **coNL**-Zugehörigkeit:
Reduktion zu Erreichbarkeit in gerichteten Graphen, siehe T1.7
- **coNL**-Härte:
Reduktion *von* Erreichbarkeit, analog □

Das Wortproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) \mathcal{A} , Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(\mathcal{A})$?

d. h. $WP_{NEA} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ NEA, } w \in L(\mathcal{A})\}$,
 $WP_{DEA} = \{(\mathcal{A}, w) \mid \mathcal{A} \text{ DEA, } w \in L(\mathcal{A})\}$

Satz 1.15

WP_{NEA} und WP_{DEA} sind entscheidbar.

WP_{NEA} ist **NL**-vollständig; WP_{DEA} ist **L**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit (in Polyzeit): siehe Th11
(Reduktion zum LP: $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$)
- **NL**-Vollst.: \approx Erreichbarkeit in gerichteten Graphen □

Das Äquivalenzproblem

Eingabe: NEAs (oder DEAs) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

Frage: Ist $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$?

d. h. $\text{ÄP}_{\text{NEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ NEAs, } L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\},$
 $\text{ÄP}_{\text{DEA}} = \{(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \text{ DEAs, } L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)\}$

Satz 1.16

ÄP_{NEA} und ÄP_{DEA} sind entscheidbar.

ÄP_{NEA} ist **PSpace**-vollständig; ÄP_{DEA} ist **NL**-vollständig.

Beweis.

- Entscheidbarkeit: siehe Th1 1
(Red. zum LP: $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$ gdw. $L(\mathcal{A}_1) \Delta L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$)
- Komplexität: Automat für $L(\mathcal{A}_1) \Delta L(\mathcal{A}_2)$ ist exponentiell in der Größe der Eingabe-NEAs; polynomiell im Fall von DEAs
Details: siehe [Holzer & Kutrib 2011] □

Das Universalitätsproblem

Eingabe: NEA (oder DEA) \mathcal{A}

Frage: Ist $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

d. h. $UP_{NEA} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ NEA, } L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\},$

$UP_{DEA} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ DEA, } L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$

Satz 1.17

UP_{NEA} und UP_{DEA} sind entscheidbar.

Beweis: Übungsaufgabe

Überblick Entscheidungsprobleme für NEAs/DEAs

Problem	entscheidbar?	für DEAs		für NEAs
		effizient lösbar?	effizient lösbar?	effizient lösbar?
LP	✓	✓	✓	✓
WP	✓	✓	✓	✓
ÄP	✓	✓	✓	✗*
UP	✓	✓	✓	✗*

* unter den üblichen komplexitätstheoretischen Annahmen
(z. B. $\text{PSPACE} \neq \text{P}$)

Literatur für diesen Teil (Basis)



John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.
Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.
2. Auflage, Addison-Wesley, 2001.
Kapitel 1,2.
Verfügbar in SUUB (verschiedene Auflagen, auch auf Deutsch)



Meghyn Bienvenu.
Automata on Infinite Words and Trees.
Vorlesungsskript, Uni Bremen, WS 2009/10.
<http://www.informatik.uni-bremen.de/tdki/lehre/ws09/automata/automata-notes.pdf>

Literatur für diesen Teil (weiterführend)



Markus Holzer, Martin Kutrib.

Descriptive and computational complexity of finite automata – A survey.

Information and Computation 209:456–470, 2011.

Kapitel 3: sehr umfassender Überblick über Entscheidungsprobleme für endliche Automaten und deren Komplexität; viel Literatur

Verfügbar in SUUB (elektronisch)

<https://doi.org/10.1016/j.ic.2010.11.013>