Automatentheorie und ihre Anwendungen
Teil 5: Alternierung

Wintersemester 2018/19 Thomas Schneider

AG Theorie der künstlichen Intelligenz (TdKI)

http://tinyurl.com/ws1819-autom

Warum Alternierung?

- Starke Beziehungen zwischen Logik und Automaten, z. B.:
  - NBAs $\leftrightarrow$ LTL (Teil 3 dieser Vorlesung)
  - NEAs $\leftrightarrow$ S1S (Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot, VL Logik)
- In Logiken kann man aber Sprachen oder Eigenschaften oft deutlich kürzer ausdrücken, z. B.:
  - LTL-Formel $\rightarrow$ NBA: exponentielle Explosion
  - S1S-Formel $\rightarrow$ NEA: sogar nicht-elementare Explosion
- Verkleinern dieser Lücke:

  Erlaube in Automaten nicht nur **existenzielle** (= nichtdeterm.) „Verzweigungen“, sondern auch **universelle**.

Warum Alternierung?

- „Alternierung" heißt also, dass ein Maschinenmodell (abwechselnd) existenzielle und universelle Entscheidungen treffen kann.
- Alternierende Varianten gibt es für alle Automatentypen aus dieser Vorlesung (auf endlichen oder unendlichen Objekten, Wörtern oder Bäumen) und für andere Maschinenmodelle (z. B. Turingmaschinen).
- Für alternierende Automaten ist Komplementierung besonders leicht zu erreichen.
- Wir beschränken uns im Folgenden auf ω-**Wort**automaten, also auf alternierende Büchi-Automaten.

Überblick

Und nun . . .

Alternierung: Grundidee

- Nichtdeterministischer Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert eine Eingabe, wenn ein akzeptierender Run **existiert**.

  d. h.: falls (q, a, q'), $(q, a, q'') \in \Delta$, kann $\mathcal{A}$ in Situation (q, a) „entscheiden“, wie der Run fortgesetzt wird.

  Mindestens eine dieser Entscheidungen muss zum Ziel führen.

- Alternierung erlaubt auch **universelle Entscheidungen**, in beliebiger Kombination mit existenziellen.

- „Beliebige Kombination“ wird realisiert durch **positive Boolesche Formel**, d. h. aussagenlogische Formel ohne $\neg$.

- Statt eines Runs (Zustandsfolge) gibt es nun einen **Run-Baum,** der alle universellen Entscheidungen berücksichtigt.

Positive Boolesche Formeln

Definition 5.1 (Syntax)

Die Menge der **positiven Booleschen Formeln (PBFs)** über einer Menge X, geschrieben $\mathrm{B}^+(X)$, ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Jedes Element $x \in X$ ist eine PBF.
- Die Konstanten $0, 1$ sind PBFs.
- Wenn φ, ψ PBFs sind, dann auch $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \vee \psi$.

Definition 5.2 (Semantik)

Jede Menge $Y \subseteq X$ definiert eine **Belegung** $V_Y : X \to \{0, 1\}$:

$$V_Y(x) = 1, \text{ falls } x \in Y; \quad V_Y(x) = 0 \text{ sonst.}$$

Eine Menge $Y \subseteq X$ **erfüllt** eine PBF $\varphi \in \mathrm{B}^+(X)$, geschrieben $Y \models \varphi$, wenn $V_Y \models \varphi$ (nach Standard-Semantik AL).

T 5.1

Alternierende Automaten

Definition 5.3

Ein **alternierender Büchi-Automat** auf ω-Wörtern **(ABA)** ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, wobei

- Q eine endliche nichtleere **Zustandsmenge** ist,
- Σ eine **Alphabet** (endliche nichtleere Menge von Zeichen) ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathrm{B}^+(Q)$ die **Überführungsfunktion** ist,
- $I \subseteq Q$ die Menge der **Anfangszustände** ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** ist.

Wir nehmen wieder o. B. d. A. $I = \{q_I\}$ an.

Alternative Akzeptanzbedingungen (Muller, Parität usw.) sind auch möglich.

Run-Bäume

Betrachten **Baum mit Verzweigungsgrad $\leq n$**, für festes $n \in \mathbb{N}$

- Positionen: Menge $P \subseteq \{1, \dots, n\}^*$, präfix-abgeschlossen
- **Kinder** eines Knotens p: **Kinder**$(p) \subseteq \{p1, \dots, pn\}$
- **Tiefe, Ebene, Nachfolger, Pfad:** wie gehabt

Pfad in P: endliche oder unendliche Folge $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2 \cdots$ von **Positionen** $\pi_i \in P$ mit

- $\pi_0 = \varepsilon$ und
- $\pi_{i+1} \in \text{Kinder}(\pi_i)$ für alle $i \geq 0$

Σ-Baum (P, t) (Alphabet Σ):

- P wie oben
- $t : P \to \Sigma$ ist Markierungsfunktion **T 5.2**

Berechnungen und Akzeptanz

Definition 5.4

Ein **Run** eines ABA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, F)$ auf einem Wort $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \cdots \in \Sigma^\omega$ ist ein ***Q*-Baum** (P, r), so dass:

- $r(\varepsilon) = q_I$
- für alle $p \in P$: wenn $r(p) = q$, dann

$$\left\{ r(p') \mid p' \in \text{Kinder}(p) \right\} \models \delta(q, \alpha_{|p|}) \,.$$

T 5.3

Run (P, r) ist **erfolgreich,** wenn für **jeden unendlichen** Pfad $\pi = \pi_0\pi_1\pi_2 \ldots$ in P gilt:

$$\text{Inf}(r, \pi) \cap F \neq \emptyset$$

T 5.3 Forts.

$\boldsymbol{L_\omega(\mathcal{A})} = \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ hat einen erfolgr. Run auf } \alpha\}$ **T 5.3 Forts.**

(für andere Akzeptanzbedingungen analog)

Und nun ...

Vorbetrachtungen

Übersetzung logischer Formeln in alternierende Automaten
ist oft einfacher als in nichtdeterministische Automaten.

Hier am Beispiel LTL $\rightarrow$ ABA

Erinnerung an LTL: $\varphi ::= x \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid X\varphi \mid \varphi\, U\, \varphi$
mit $x \in \mathrm{AV}$ (Aussagenvariablen)

$s, i \models \varphi\, U\, \psi$, falls $s, j \models \psi$ für ein $j \geqslant i$
und $s, k \models \varphi$ für alle k mit $i \leqslant k < j$

$F\varphi \equiv (x \vee \neg x)\, U\, \varphi$

$G\varphi \equiv \neg F \neg \varphi$

Expansionsgesetz:
$s, i \models \varphi\, U\, \psi$ **gdw.** $s, i \models \psi$ oder $(s, i \models \varphi$ und $s, i+1 \models \varphi\, U\, \psi)$

Intuitionen der Konstruktion

Seien φ eine LTL-Formel und ψ eine beliebige Teilformel.

$$\boldsymbol{\sim\psi} = \begin{cases} \vartheta & \text{falls } \psi = \neg\vartheta \\ \neg\psi & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbf{cl}(\boldsymbol{\varphi}) = \{\psi, {\sim}\psi \mid \psi \text{ ist Teilformel von } \varphi\}$$

Bestandteile des ABA $\mathcal{A}_\varphi$

- Eingabealphabet: $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$ wie gehabt
- Zustände: für jede Formel $\psi \in \mathsf{cl}(\varphi)$ ein q_ψ; Startzustand q_φ
- Übergänge:
  - für $\wedge, \vee$: mittels PBF
  - für $\neg$: per „Negation" der PBF
  - für $X\psi$: schicke q_ψ zur nächsten Position
  - für U: per Expansionsgesetz
- F verhindert unendliches „Aufschieben" von U-Teilformeln!

„Negation von PBFs“

Idee: Nutzen stattdessen Dualität von $\wedge, \vee$ (de Morgan), um Negation nach innen zu ziehen.

Negation eines Atoms q_ψ ist dann $q_{\sim\psi}$.

Genauer: mittels Operator $\overline{}$ wie folgt:

$$\overline{\zeta_1 \wedge \zeta_2} = \overline{\zeta_1} \vee \overline{\zeta_2}$$
$$\overline{\zeta_1 \vee \zeta_2} = \overline{\zeta_1} \wedge \overline{\zeta_2}$$
$$\overline{q_\psi} = q_{\sim\psi}$$
$$\overline{1} = 0$$
$$\overline{0} = 1$$

Konstruktion des ABA

- $Q = \{q_\psi \mid \psi \in \mathsf{cl}(\varphi)\}, \quad q_I = q_\varphi$
- $\Sigma = 2^{\mathsf{AV}}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathsf{B}^+(Q)$ wie folgt:

$$\delta(q_x, a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(q_{\sim\psi}, a) = \overline{\delta(q_\psi, a)}$$

$$\delta(q_{\psi\wedge\vartheta}, a) = \delta(q_\psi, a) \wedge \delta(q_\vartheta, a)$$

$$\delta(q_{\psi\vee\vartheta}, a) = \delta(q_\psi, a) \vee \delta(q_\vartheta, a)$$

$$\delta(q_{X\psi}, a) = q_\psi$$

$$\delta(q_{\psi U\vartheta}, a) = \delta(q_\vartheta, a) \vee \big(\delta(q_\psi, a) \wedge q_{\psi U\vartheta}\big)$$

- $F = \{q_{\neg(\psi U \vartheta)} \mid \neg(\psi\ U\ \vartheta) \in \mathsf{cl}(\varphi)\}$ **T 5.4**

Vergleich mit Konstruktion LTL $\longrightarrow$ (G)NBA aus Teil 3

Auffällige Unterschiede

- ABA hat linear viele Zustände, GNBA exponentiell viele.
- Hier wird die Bedeutung **aller** Operatoren in δ kodiert.

Gemeinsamkeiten

- Beide Konstruktionen verwenden das Expansionsgesetz.
- Beide Akzeptanzbedingungen verfolgen denselben Zweck: verbieten, die Erfüllung von U-Formeln ∞ weit hinauszuzögern.

1. Punkt bedeutet natürlich, dass es zu einem ABA im Allg. keinen polynomiell großen äquivalenten NBA geben kann.

Und nun ...

1. Einführung und Grundbegriffe
2. Von LTL zu alternierenden Automaten
3. Komplementierung

Abschluss unter Komplement

... ist für ABA-erkennbare Sprachen besonders leicht zu zeigen.

Für eine PBF φ definieren wir **dual(φ)**
als die PBF, die durch „Umdrehen“ von $\wedge$ und $\vee$ entsteht,
z. B.: $\mathsf{dual}\big((q_1 \wedge q_2) \vee q_3\big) = (q_1 \vee q_2) \wedge q_3$

Wir betrachten zur weiteren Erleichterung jetzt A**M**As
(alternierende **Muller**-Aut., Akzeptanzkomp. $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ wie gehabt)

Abschluss unter Komplement

Satz 5.5

Die Klasse der AMA-erkennbaren ω-Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \{q_I\}, \mathcal{F})$ ein AMA.

Konstruiere AMA $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta', \{q_I\}, \mathcal{F}')$ wie folgt:

- Für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$, setze $\delta'(q, a) = \mathsf{dual}(\delta(q, a))$.
- $\mathcal{F}' = 2^Q \setminus \mathcal{F}$ **T 5.5**

Dann gilt: $L_\omega(\mathcal{A}') = \overline{L_\omega(\mathcal{A})}$ (Beweis mittels Spielen) $\square$

Insbesondere ist $\mathcal{A}'$ (bis auf $\mathcal{F}'$) nicht größer als $\mathcal{A}$!

Alternierende vs. nichtdeterministische Automaten

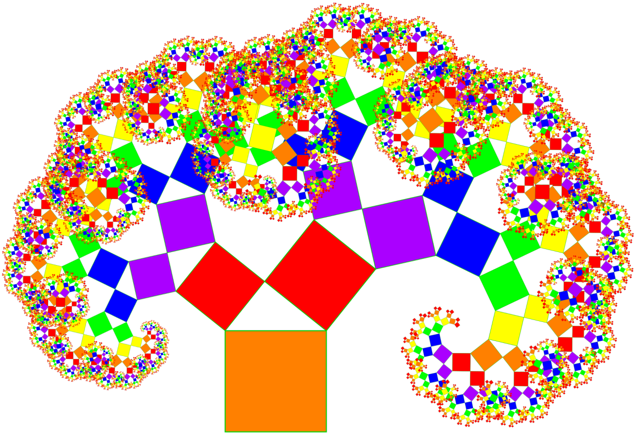
Satz 5.6 (Miyano & Hayashi 1984)

Für jeden ABA $\mathcal{A}$ gibt es einen NBA $\mathcal{A}'$ mit $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{A}')$.

Alternierende und nichtdeterministische Büchi-Automaten sind also **gleichmächtig.**

Beweisskizze: Siehe Folien aus dem letzten Jahr
`http://tinyurl.com/ws1718-automaten`

Fast fertig für dieses Semester . . .



Pythagoras-Baum. Quelle: Wikipedia, User Gjacquenot (Lizenz CC BY-SA 3.0)

Danke für Eure Aufmerksamkeit!

Literatur für diesen Teil

Bernd Finkbeiner.
Automata, Games, and Verification.
Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SoSe 2015.
Kap. 8: Alternating Büchi Automata.
https://www.react.uni-saarland.de/teaching/automata-games-verification-15/lecture-notes.html
https://www.react.uni-saarland.de/teaching/automata-games-verification-15/downloads/notes.pdf