Logik

WiSe 2018/19

Thomas Schneider

Teil 4: Prädikatenlogik zweiter Stufe

Homepage der Vorlesung: http://tinyurl.com/ws1819-logik

Übersicht Teil 4

Logik zweiter Stufe

Die Logik zweiter Stufe (SO) erweitert die Logik erster Stufe, behebt die meisten Unzulänglichkeiten in der Ausdrucksstärke.

Grundidee:

Man kann nicht nur über Elemente von Strukturen quantifizieren, sondern auch über Mengen von Elementen und Relationen.

Zum Beispiel definiert folgende SO-Formel Erreichbarkeit über E:

$$\varphi(x,y) = \forall X \, \big(\, (X(\underline{x}) \land \forall z \forall z' \, (X(z) \land E(z,z') \to X(z'))) \\ \to X(\underline{y}) \, \big)$$

„Jede Knotenmenge, die x enthält und unter Nachfolgern abgeschlossen ist, enthält auch y.“

Logik zweiter Stufe

Wir werden sehen, dass die Logik zweiter Stufe (SO)

- eine sehr befriedigende Ausdrucksstärke hat
- eng mit anderen Gebieten der Informatik zusammenhängt, insbesondere den formalen Sprachen und der Komplexitätstheorie

Diesen Vorteilen steht aber eine (noch) schlechtere Berechnungskomplexität als in FO gegenüber.

SO sollte als interessante Logik zur Definition interessanter Eigenschaften betrachtet werden, weniger als Logik zu Deduktion.

Wir fixieren für jedes $n \geq 1$ eine abzählbar unendliche Menge $\text{VAR}^n = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ von n-*ären Relationsvariablen.*

Syntax

Definition 4.1 (SO-Formeln)

Die Menge der *Formeln* der *Prädikatenlogik zweiter Stufe* ist induktiv wie folgt definiert:

- Sind t_1, t_2 Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.
- Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und P ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.
- Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und $X \in \mathrm{VAR}^n$, dann ist $X(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.
- Wenn φ und ψ Formeln sind, dann auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$.
- Wenn φ eine Formel ist und $x \in \mathrm{VAR}$, dann sind $\exists x\, \varphi$ und $\forall x\, \varphi$ Formeln.
- Wenn φ eine Formel ist und $X \in \mathrm{VAR}^n$, dann sind $\exists X\, \varphi$ und $\forall X\, \varphi$ Formeln.

Die Menge aller SO-Formeln über einer Signatur τ bezeichnen wir mit $\mathrm{SO}(\tau)$.

Sprechweisen und Konventionen

- *Atome* haben nun drei mögliche Formen:

  $t = t' \qquad P(t_1, \ldots, t_n) \qquad X(t_1, \ldots, t_n)$

- Die Quantoren $\exists X$ und $\forall X$ binden genau wie $\exists x$ und $\forall x$ (stärker als $\wedge$ und $\vee$, die wiederum stärker als $\rightarrow$, $\leftrightarrow$).
- Relationsvariablen können ebenso wie Objektvariablen *frei* oder *gebunden* vorkommen.
- Ein *Satz* ist eine Formel ohne freie Variablen *beider* Arten.

Semantik

Wir gehen wieder in zwei Schritten vor: zunächst Terme, dann Formeln

Definition 4.2 (SO-Zuweisung, SO-Semantik)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur. Eine *SO-Zuweisung in* $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung β, die

- jeder Objektvariablen $x \in \mathrm{VAR}$ ein Element $\beta(x) \in A$ und
- jeder n-ären Relationsvariablen $X \in \mathrm{VAR}^n$ eine n-äre Relation $\beta(X) \subseteq A^n$

zuweist. Wie in FO erweitert man β induktiv auf Terme.

Erweiterung der Erfülltheitsrelation $\models$ auf SO:

- $\mathfrak{A}, \beta \models X(t_1, \ldots, t_n)$ gdw. $(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_n)) \in \beta(X)$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \exists X\, \varphi$ mit $X \in \mathrm{VAR}^n$ gdw. ein $R \subseteq A^n$ existiert mit $\mathfrak{A}, \beta[X/R] \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, \beta \models \forall X\, \varphi$ mit $X \in \mathrm{VAR}^n$ gdw. für alle $R \subseteq A^n$ gilt, dass $\mathfrak{A}, \beta[X/R] \models \varphi$

Beispiele

Erreichbarkeit:

$$\varphi(x, y) = \forall X \Big(\big(X(x) \wedge \forall z \forall z' \left(X(z) \wedge E(z, z') \rightarrow X(z')\right) \big) \rightarrow X(y) \Big)$$

„Jede Knotenmenge, die x enthält und unter Nachfolgern abgeschlossen ist, enthält auch y.“

T4.1

EVEN $= \{ \mathfrak{A} \mid |A| \text{ geradzahlig} \}$

$$\mathrm{Func}(R) = \forall x \forall y \forall y' \left(R(x, y) \wedge R(x, y') \rightarrow y = y' \right)$$

$$\mathrm{Func}^-(R) = \forall x \forall y \forall y' \left(R(y, x) \wedge R(y', x) \rightarrow y = y' \right)$$

$$\varphi = \exists R \Big(\forall x \exists y\, R(x, y) \vee R(y, x) \wedge \forall x \left(\exists y\, R(x, y) \rightarrow \neg \exists y\, R(y, x) \right) \wedge \mathrm{Func}(R) \wedge \mathrm{Func}^-(R) \Big)$$

„A kann ohne Überlappungen mit $R \in \mathrm{VAR}^2$ überdeckt werden.“

Beispiele

Unendliche Strukturen:

$$\begin{aligned}\varphi_\infty = \exists R \big(\; & \exists x \exists y\, R(x,y) \wedge \\ & \forall x \forall y \,(\, R(x,y) \rightarrow \exists z\, R(y,z)\,) \wedge \\ & \forall x\, \neg R(x,x) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z \,(\,(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\,)\big)\end{aligned}$$

„Man kann eine Teilmenge des Universums in einer irreflexiven, transitiven Ordnung ohne größtes Element anordnen."

Endliche Strukturen:

$\neg\varphi_\infty$

Auch Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit sind definierbar.

Löwenheim-Skolem gilt also nicht (weder aufwärts noch abwärts).

Beispiele

Kompaktheit gilt ebenfalls nicht:

Betrachte folgende Menge von SO-Sätzen.

$$\Gamma = \{\neg\varphi_\infty\} \cup \{\varphi_n \mid n \geq 1\}$$

wobei $\varphi_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$ „Die Struktur hat Größe $\geq n$."

Offensichtlich:

- Γ ist unerfüllbar
- Jede endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ ist erfüllbar (in einer Struktur der Größe max$\{n \mid \varphi_n \in \Delta\}$)

SO hat also nicht die Kompaktheits-Eigenschaft.

Beispiele

Betrachte Signatur mit Konstantensymbol 0, unärem Funktionssymbol nf

Die Peano-Axiome (in leicht angepasster Form):

α_1: $\forall x\, \mathsf{nf}(x) \neq 0$

α_2: $\forall x \forall y\, (\mathsf{nf}(x) = \mathsf{nf}(y) \rightarrow x = y)$

α_3: $\forall X \Big((X(0) \wedge \forall x\, (X(x) \rightarrow X(\mathsf{nf}(x)))) \rightarrow \forall x\, X(x) \Big)$

Lemma 4.3

$\mathfrak{A} \models \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ gdw. $\mathfrak{A}$ isomorph zu $(\mathbb{N}, \mathsf{nf}, 0)$.

Wegen des aufsteigenden Satzes von Löwenheim-Skolem für FO gibt es keine FO-Formel, die das leistet!

In SO lassen sich basierend auf 0 und nf auch 1, $+$ und $\cdot$ definieren; also lässt sich Arithmetik bis auf Isomorphie definieren!

Einfache Resultate

Folgende Resultate überträgt man leicht von FO nach SO:

- Koinzidenzlemma und Isomorphielemma
- Existenz äquivalenter Formeln in Pränex-Normalform (alle herstellbar in Linearzeit)

Die Dualität der Quantoren gilt auch für SO-Quantoren:

$$\neg\exists R\, \neg\varphi \equiv \forall R\, \varphi \qquad \text{für Relationsvariablen } R$$
$$\neg\forall R\, \neg\varphi \equiv \exists R\, \varphi \qquad \text{beliebiger Stelligkeit}$$

MSO

Für viele Zwecke genügen bereits unäre Relationsvariablen.

Die resultierende MSO hat oft bessere Eigenschaften als die volle SO.

Definition 4.4 (Monadische Logik zweiter Stufe, MSO)

Eine SO-Formel φ heißt *monadisch,*
wenn sie keine Relationsvariablen mit Arität > 1 enthält.

MSO(τ) ist die Menge aller monadischen Formeln aus SO(τ).

Beispiel: Zusammenhang von Graphen ist MSO-ausdrückbar.

$$\begin{aligned}\varphi = \forall X \Big(\Big(& \exists x\, X(x) \wedge \\ & \forall x \forall y\, \big((X(x) \wedge E(x,y)) \rightarrow X(y) \big) \wedge \\ & \forall x \forall y\, \big((X(x) \wedge E(y,x)) \rightarrow X(y) \big) \Big) \\ & \rightarrow \forall x\, X(x) \Big)\end{aligned}$$

„Jede Zusammenhangs-komponente enthält alle Knoten.“

Prädikatenlogik zweiter Stufe

Auswertungsproblem

Der Algorithmus für das Auswerten von FO-Formeln
kann leicht auf SO-Formeln erweitert werden.

Der erweiterte Algorithmus benötigt

- polynomiell viel Platz für MSO
- exponentiell viel Platz für volle SO

Dieser Platzverbrauch ist optimal, denn

- das MSO-Auswertungsproblem ist PSpace-vollständig
- das SO-Auswertungsproblem ist „ungefähr ExpSpace-vollständig“

Eine Analyse der *Zeit*komplexität zeigt aber wichtige Unterschiede zwischen FO und MSO!

Zur Erinnerung: der Algorithmus für FO

Function $\mathtt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \varphi)$**:**
  input : endl. Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$, FO-Formel φ
  output: Wahrheitswert: 1 für $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$, 0 für $\mathfrak{A}, \beta \not\models \varphi$

  switch φ **do**
    case $\varphi = (t = t')$: **if** $\beta(t) = \beta(t')$ **then return** 1 **else return** 0
    case $\varphi = P(t_1, \dots, t_k)$:
      if $(\beta(t_1), \dots, \beta(t_k)) \in P^{\mathfrak{A}}$ **then return** 1 **else return** 0
    case $\varphi = \neg\psi$: **return** $1 - \mathtt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \psi)$
    case $\varphi = \psi \wedge \vartheta$: **return** min$\{\mathtt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \psi), \mathtt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \vartheta)\}$
    case $\varphi = \psi \vee \vartheta$: **return** max$\{\mathtt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \psi), \mathtt{ausw}(\mathfrak{A}, \beta, \vartheta)\}$
    case $\varphi = \exists x\, \psi$:
      rufe $\mathtt{ausw}\ (\mathfrak{A}, \beta[x/a], \psi)$ für alle $a \in A$
      if *ein Ruf erfolgreich* **then return** 1 **else return** 0
    case $\varphi = \forall x\, \psi$:
      rufe $\mathtt{ausw}\ (\mathfrak{A}, \beta[x/a], \psi)$ für alle $a \in A$
      if *alle Rufe erfolgreich* **then return** 1 **else return** 0

Erweiterung des Algorithmus auf SO

Fälle für die SO-Teilformeln:

case $\varphi = X(t_1, \ldots, t_\ell)$: **do**
  if $(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_\ell)) \in \beta(X)$ **then return** 1 **else return** 0

case $\varphi = \exists X\, \psi$, *wobei* X *eine* ℓ*-stellige Relationsvariable:* **do**
  rufe `ausw` $(\mathfrak{A}, \beta[X/B], \psi)$ für alle $B \subseteq A^\ell$
  if *ein Ruf erfolgreich* **then return** 1 **else return** 0

case $\varphi = \forall X\, \psi$, *wobei* X *eine* ℓ*-stellige Relationsvariable:* **do**
  rufe `ausw` $(\mathfrak{A}, \beta[X/B], \psi)$ für alle $B \subseteq A^\ell$
  if *alle Rufe erfolgreich* **then return** 1 **else return** 0

Platzkomplexität von Auswertung

Lemma 4.5

Der Algorithmus benötigt

1. polynomiell viel Platz, wenn die Eingabe eine MSO-Formel ist
2. exponentiell viel Platz im Allgemeinen

T4.2

Das Auswertungsproblem ist damit für MSO PSpace-vollständig, genauso wie für FO.

Warum beruht SQL dann auf FO und nicht auf der deutlich ausdrucksstärkeren MSO?

Zur Antwort betrachten wir die *Zeit*komplexität des Auswertungsproblems.

Zeitkomplexität von Auswertung

Lemma 4.6

Bei Eingabe einer Struktur $\mathfrak{A}$ der Größe n und einer Formel φ der Größe k benötigt der Algorithmus

1. Zeit $\mathcal{O}(n^k)$, wenn φ eine FO-Formel ist
2. Zeit $2^{\mathcal{O}(nk)}$, wenn φ eine MSO-Formel ist
3. Zeit $2^{\mathcal{O}(n^{2k})}$ im Allgemeinen.

T4.3

Diese Komplexitäten kann man (wahrscheinlich) nicht wesentlich verbessern.

Beachte: in Anwendungen ist …

- n meist sehr groß (Datenbank, zu verifizierendes System, …)
- k meist eher klein (Datenbankanfrage, zu verifizierende Eigenschaft, …)

Diese Beobachtungen führen zur Idee der *Datenkomplexität.*

Datenkomplexität von Auswertung

Bei der *Datenkomplexität* betrachtet man

- nur die Struktur $\mathfrak{A}$ als Eingabe (die *Daten*bank bzw. das System)
- die Formel φ als fixiert, also ist ihre Größe k eine Konstante.

Der Algorithmus hat dann folgende Komplexität:

Lemma 4.7

Bei Eingabe einer Struktur $\mathfrak{A}$ der Größe n benötigt der Algorithmus

1. Zeit $\mathsf{poly}(n)$ wenn eine FO-Formel ausgewertet wird
2. Zeit $2^{\mathcal{O}(n)}$ wenn eine MSO-Formel ausgewertet wird
3. Zeit $2^{\mathsf{poly}(n)}$ wenn eine SO-Formel ausgewertet wird

Aus dieser Perspektive:
die Zeitkomplexität von (M)SO ist für praktischen Einsatz zu groß!

Komplexität von Gültigkeit

Gültigkeit ist in SO (und MSO) ein noch schwierigeres Problem als in FO:

Theorem 4.8
Die Menge der Tautologien in SO ist nicht rekursiv aufzählbar.

T4.4

Auch die erfüllbaren Formeln und unerfüllbaren Formeln sind natürlich nicht rekursiv aufzählbar; das alles gilt bereits in MSO.

Das bedeutet natürlich:
Theorembeweisen im Sinne von FO ist in SO nicht möglich.

Es gibt trotzdem SO-Beweiser (wie `Isabelle` oder `HOL`), die aber von den Benutzenden „geleitet" werden müssen.

Überblick Schlussfolgerungsprobleme

	Auswertungsproblem	Erfüllbarkeitsproblem	Gültigkeitsproblem	Folgerbarkeitsproblem
Horn-Formeln	in Linearzeit	in Polyzeit	in Linearzeit	in Polyzeit
Aussagenlogik	in Linearzeit	NP-vollständig	co-NP-vollständig	co-NP-vollständig
FO	PSpace-vollständig[1]	unentscheidbar nicht semi-entsch.	unentscheidbar semi-entsch.	unentscheidbar semi-entsch.
MSO	PSpace-vollständig[2]	unentscheidbar nicht semi-entsch.	unentscheidbar nicht semi-entsch.	unentscheidbar nicht semi-entsch.
SO	ExpSpace-vollständig[2]	unentscheidbar nicht semi-entsch.	unentscheidbar nicht semi-entsch.	unentscheidbar nicht semi-entsch.

[1]Datenkomplexität polynomiell [2]Datenkomplexität exponentiell

Prädikatenlogik zweiter Stufe

MSO über linearen Strukturen

Eine wichtige Eigenschaft von MSO ist die Entscheidbarkeit von Erfüllbarkeit, Gültigkeit, etc. über eingeschränkten Strukturklassen:

- endliche und unendliche lineare Strukturen
- endliche und unendliche Baumstrukturen

Diese Klassen von Strukturen liefern auch einen interessanten Zusammenhang zu den formalen Sprachen, denn:

endliche lineare Struktur $\triangleq$ Wort im Sinne der formalen Sprachen

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur *endliche* lineare Strukturen, also Wörter.

MSO über linearen Strukturen

Definition 4.9 (MSO eines Nachfolgers, S1S)

Die Menge *S1S* der *MSO-Formeln eines Nachfolgers* sind die MSO-Formeln in der folgenden Signatur:

- ein Konstantensymbol 0
- ein einstelliges Funktionssymbol s (für „successor“, „Nachfolger“)
- ein zweistelliges Relationssymbol $<$
- einstellige Relationssymbole $P_1, P_2, P_3, \ldots$

In S1S sind nur Strukturen $\mathfrak{A}$ zugelassen mit $A = \{0, \ldots, n\}$ für ein $n \geq 0$. Die Interpretation aller Symbole außer der P_i ist wie folgt fixiert:

- $0^{\mathfrak{A}} = 0;$
- $s^{\mathfrak{A}}(i) = i + 1$ wenn $i + 1 \in A$, sonst $s^{\mathfrak{A}}(i) = i$
- $<^{\mathfrak{A}} = \{(i, j) \mid i, j \in A$ und $i < j\}$

T4.5

S1S: Beispiel 1

Lineare Strukturen modellieren Läufe von Systemen in der Verifikation.

Die Elemente des Universums entsprechen dann Zeitpunkten.

Zum Beispiel:

W_i: Prozess i wartet auf kritischen Abschnitt

A_i: Prozess i im kritischen Abschnitt

$i \in \{1, 2\}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "s"] & 1 \arrow[r, "s"] & 2 \arrow[r, "s"] & 3 \arrow[r, "s"] & 4 \arrow[r, "s"] & 5 \arrow[loop right, "s"] \\
W_1 & A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_1 \\
 & & W_2 & & W_1 &
\end{tikzcd}$$

S1S beschreibt zu verifizierende Eigenschaften, z. B.:

$$\neg \exists x \; (\; A_1(x) \wedge A_2(x) \;)$$

$$\bigwedge_{i \in \{1,2\}} \forall x \Big(\; W_i(x) \rightarrow \exists y \; (\; x < y \wedge A_i(y) \;) \; \Big)$$

S1S: Beispiel 2

Wir beschränken uns auf endlich viele Relationssymbole $P_1, \ldots, P_n$.

Für das Alphabet $\Sigma_n := \{0, 1\}^n$ gilt die Entsprechung

S1S-Struktur $\triangleq$ Wort über Σ_n im Sinne der formalen Sprachen

Beispiel für $n = 1$: T4.6

Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "s"] & 1 \arrow[r, "s"] & 2 \arrow[r, "s"] & 3 \arrow[r, "s"] & 4 \arrow[loop right, "s"] \\
P_1 & P_1 & & P_2 & P_1 \\
 & P_2 & & & P_2
\end{tikzcd}$$

entspricht Wort $\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{1}$ über Alphabet $\Sigma_2 = \{0, 1\}^2$

Spezielle Form des Alphabetes keine Einschränkung,

obiges Wort wird z.B. $bdacd$ bei Zuordnung

$\binom{0}{0} = a \quad \binom{1}{0} = b$

$\binom{0}{1} = c \quad \binom{1}{1} = d$

T4.7

MSO-definierbare Sprachen

S1S-Strukturen über $P_1, \ldots, P_n$ und Wörter über Σ_n sind also genau dasselbe, nur leicht unterschiedlich repräsentiert.

Mit dieser Beobachtung werden die S1S-Sätze zum Werkzeug zur Definition von formalen Sprachen:

Definition 4.10 (MSO-definierte Sprache)

Ein S1S-Satz φ mit Symbolen $P_1, \ldots, P_n$ *definiert* folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma_n = \{0, 1\}^n$:

$$L(\varphi) = \{w \in \Sigma_n^* \mid w \models \varphi\}$$

T4.8

Naheliegende Frage:

Welche Klasse von Sprachen lässt sich mittels S1S/MSO definieren?

Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot

Interessanterweise sind die MSO-definierbaren Sprachen genau die regulären Sprachen.

Um zu beweisen, dass jede MSO-definierbare Sprache regulär ist, zeigen wir:

> Jeder S1S-Satz φ kann in einen endlichen Automaten A_φ gewandelt werden, so dass $L(\varphi) = L(A_\varphi)$.

Dies zeigt auch:

> Erfüllbarkeit und Gültigkeit in S1S ist entscheidbar.

Denn φ ist erfüllbar gdw. $L(\varphi) \neq \emptyset$,
und das Leerheitsproblem für endliche Automaten ist entscheidbar.

Eine technische Anmerkung

In logischen Strukturen darf das Universum per Def. nicht leer sein.

Daher hat das leere Wort *keine* Entsprechung als logische Struktur.

Wir betrachten daher im Folgenden ausschließlich Sprachen, die das leere Wort *nicht* enthalten:

> z. B. ist also mit „reguläre Sprache" gemeint:
> „reguläre Sprache, die *nicht* das leere Wort enthält".

Aus Sicht der formalen Sprachen ist das Weglassen des leeren Wortes keine wesentliche Änderung.

Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot

Theorem 4.11 (Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1. L ist regulär
2. $L = L(\varphi)$ für einen S1S-Satz φ

Beweis von „1 $\Rightarrow$ 2":

Übersetzung von endlichen Automaten in „äquivalenten" S1S-Satz

T4.9

Kurze Wiederholung S1S

Signatur: $0, s, <, P_1, P_2, P_3, \ldots$ plus unäre Rel.-variablen *X*, *Y*, …

S1S-Struktur z. B.:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{s} & 1 & \xrightarrow{s} & 2 & \xrightarrow{s} & 3 & \xrightarrow{s} & 4 \circlearrowright s \\ P_1 & & P_1 & & & & P_2 & & P_1 \\ & & P_2 & & & & & & P_2 \end{array}$$

entspricht Wort $\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{1}$ über Alphabet $\Sigma_2 = \{0,1\}^2$

S1S-Satz φ mit Symbolen $P_1, \ldots, P_n$ **definiert Sprache**
$L(\varphi) = \{w \in \Sigma_n^* \mid w \models \varphi\}$ über dem Alphabet $\Sigma_n = \{0,1\}^n$

Theorem 4.11 (Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1. L ist regulär
2. $L = L(\varphi)$ für einen S1S-Satz φ

Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot

Vorbereitungen zum Beweis von „2 ⇒ 1“.

Zunächst bringen wir den S1S-Satz in eine geeignete Normalform:

- FO-Variablen werden nicht verwendet
- atomare Formeln haben die Form
  - $X \subseteq Y$, mit Semantik $\forall x\,(\,X(x) \to Y(x)\,)$
  - $\mathrm{succ}(X) = Y$, mit Semantik „X und Y sind Einermengen $\{k\}$ und $\{\ell\}$ mit $\ell = k+1$“

  wobei X und Y Relationsvariablen oder Relationssymbole sind
- (die Symbole 0, $<$, s werden also nicht verwendet)

T4.10

Lemma 4.12
Jeder S1S-Satz kann effektiv in einen äquivalenten Satz in Normalform gewandelt werden.

T4.11

Satz von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot

Theorem 4.11 (Büchi-Elgot-Trakhtenbrot)
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1. L ist regulär
2. $L = L(\varphi)$ für einen S1S-Satz φ

Beweis von „2 ⇒ 1“.

Induktive Übersetzung von S1S-Formeln in Normalform in „äquivalenten“ endlichen Automaten (NEA)

Die strukturelle Induktion erfordert es, auch Formeln mit freien Variablen zu betrachten.

Diese werden wie die unären Relationssymbole $P_1, P_2, \ldots$ behandelt, z.B. liefert $\exists Y\,(\,X \subseteq Y \wedge P_1 \subseteq Y\,)$ Sprache über $\Sigma_2 = \{0,1\}^2$

T4.12 T4.13

FO und formale Sprachen

Da MSO-Definierbarkeit genau den regulären Sprachen entspricht, ist eine **natürliche Frage:**

Sei F1S die Einschränkung von S1S auf FO.
Welche Sprachklasse entspricht den F1S-definierbaren Sprachen?

Definition 4.13 (sternfreie Sprachen)
Die Klasse der *sternfreien Sprachen* über einem Alphabet Σ ist die kleinste Klasse, so dass:

- $\emptyset$ und $\{a\}$ sind sternfreie Sprachen für alle $a \in \Sigma$.
- wenn L und L' sternfreie Sprachen sind, dann auch $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$, $L \cap L'$, $L \cup L'$ und $L \cdot L' = \{ww' \mid w \in L,\ w' \in L'\}$.

Beachte: Im Unterschied zu den regulären Sprachen steht der Kleene-Stern nicht zur Verfügung, dafür aber Komplement.

T4.14

FO und formale Sprachen

Ohne Beweis:

Theorem 4.14
Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

1. L ist sternfrei
2. $L = L(\varphi)$ für einen F1S-Satz φ

Dieses Resultat ist erheblich schwieriger zu beweisen als das Theorem von Büchi-Elgot-Trakhtenbrot.

Beispiel für eine nicht sternfreie/F1S-definierbare reguläre Sprache:

$$L_{\text{even}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \text{ ist geradzahlig }\}$$

Beweis mittels EF-Spielen möglich.

Entscheidbarkeit S1S

Für jeden S1S-Satz φ:
φ erfüllbar gdw. es gibt S1S-Struktur w mit $w \models \varphi$ gdw. $L(A_\varphi) \neq \emptyset$

Da Leerheit von endlichen Automaten entscheidbar:

Theorem 4.15
In S1S sind Erfüllbarkeit und Gültigkeit entscheidbar.

Die Komplexität ist jedoch beträchtlich:

- jede Negation: konstruierter NEA wird exponentiell größerer DEA; jede existentielle Quantifizierung macht aus DEA wieder NEA
- Das Entscheidungsverfahren ist daher *nicht-elementar;* man kann beweisen, dass es nicht besser geht.

Es gibt trotzdem Reasoner für (Varianten von) S1S: z. B. `Mona`

Entscheidbarkeit S1S

Das Entscheidbarkeitsresultat lässt sich auf einige andere wichtige Strukturklassen übertragen:

Theorem 4.16
MSO ist über den folgenden Strukturklassen entscheidbar:

- unendliche lineare Strukturen (unendliche Wörter)
- endliche und unendliche Baumstrukturen

Der Beweis ist im Prinzip ähnlich, außer dass

1. man andere Arten von Automaten benötigt, die unendliche Wörter bzw. endliche/unendliche Bäume verarbeiten;
2. einige der Konstruktionen erheblich anspruchsvoller werden (insbesondere das Komplementieren von Automaten).

☛ siehe auch Master-Kurs
„Automatentheorie und ihre Anwendungen“ (vorauss. WiSe 19/20)

Bitte ~~keine~~ Werbung!

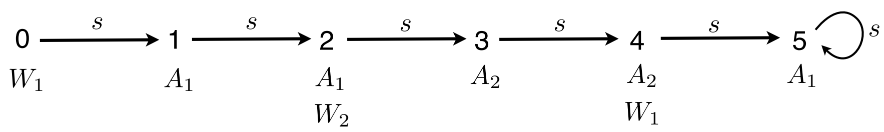
Prädikatenlogik zweiter Stufe

Temporallogik

In der Verifikation verwendet man S1S meist nicht direkt, sondern *spezialisierte Temporallogiken wie LTL, CTL und das μ-Kalkül*

Nochmal das Verifikations-Beispiel:

W_i: Prozess i wartet auf kritischen Abschnitt
A_i: Prozess i im kritischen Abschnitt
$i \in \{1,2\}$



Eigenschaften kann man nun statt in S1S auch z. B. in LTL beschreiben:

$$\neg\exists x\ (\ A_1(x) \land A_2(x)\ ) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\Diamond(A_1 \land A_2)$$

$$\bigwedge_{i\in\{1,2\}} \forall x \Big(\ W_i(x) \to \exists y\ (\ x < y \land A_i(y)\ )\ \Big) \quad \rightsquigarrow \quad \bigwedge_{i\in\{1,2\}} \Box(W_i \to \Diamond A_i)$$

LTL: Syntax

Wir werfen einen kurzen Blick auf **LTL (Linear Temporal Logic).**

Fixiere eine abzählbar unendliche Menge TVAR $= \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ von *temporalen Aussagenvariablen.*

Diese Variablen entsprechen den unären Relationssymbolen P_i in S1S.

Sie verhalten sich ähnlich wie Aussagenvariablen der Aussagenlogik, können allerdings zu jedem Zeitpunkt einen unterschiedlichen Wahrheitswert annehmen.

LTL: Syntax

Definition 4.17 (LTL-Syntax)

Die Menge der LTL-Formeln ist induktiv definiert wie folgt:

- jede temporale Aussagenvariable ist eine LTL-Formel
- wenn φ und ψ LTL-Formeln sind, dann auch

$\neg\varphi$	
$\varphi \wedge \psi$	
$\varphi \vee \psi$	
$\bigcirc\varphi$	„im nächsten Zeitpunkt φ“
$\Diamond\varphi$	„in Zukunft irgendwann φ“
$\Box\varphi$	„in Zukunft immer φ“
$\varphi\,\mathcal{U}\,\psi$	„φ until ψ“

T4.15

LTL: Semantik

Die Semantik von LTL basiert üblicherweise auf *unendlichen* linearen Strukturen; wir verwenden hier endliche S1S-Strukturen.

LTL-Formeln haben einen Wahrheitswert, der *abhängig ist vom Zeitpunkt:*

Definition 4.18 (LTL-Semantik)

Wir definieren Erfülltheitsrelation $(\mathfrak{A}, n) \models \varphi$ induktiv, für S1S-Struktur $\mathfrak{A}$, Zeitpunkt $n \in A$ und LTL-Formel φ:

- $\mathfrak{A}, n \models p_i$ gdw. $n \in P_i^{\mathfrak{A}}$
- $\mathfrak{A}, n \models \neg\varphi$ gdw. $\mathfrak{A}, n \not\models \varphi$, ähnlich für $\wedge$ und $\vee$
- $\mathfrak{A}, n \models \bigcirc\varphi$ gdw. $n+1 \in A$ und $\mathfrak{A}, n+1 \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, n \models \Diamond\varphi$ gdw. $\exists m \in A$ mit $m \geq n$ und $\mathfrak{A}, m \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, n \models \Box\varphi$ gdw. $\forall m \in A$ mit $m \geq n$ gilt: $\mathfrak{A}, m \models \varphi$
- $\mathfrak{A}, n \models \varphi\,\mathcal{U}\,\psi$ gdw. $\exists m \in A$, so dass $m \geq n$,
  $\mathfrak{A}, k \models \varphi$ für $n \leq k < m$ und $\mathfrak{A}, m \models \psi$

T4.16

LTL versus F1S

Beachte:

- Syntaktisch kann man LTL als Erweiterung von Aussagenlogik auffassen.
- Semantisch handelt es sich eher um eine Logik erster Stufe, bei der die FO-Variablen aber implizit sind.
- Derartige Logiken nennt man auch *Modallogik.*

Eine LTL-Formel φ ist *initial äquivalent* zu einer F1S-Formel $\psi(x)$ mit einer freien Variablen, wenn für alle $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A}, 0 \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{A} \models \psi[0]$$

T4.17

Lemma 4.19

Zu jeder LTL-Formel φ existiert eine initial äquivalente F1S-Formel $\psi(x)$.

T4.18

LTL versus F1S

Sehr viel überraschender (und schwieriger zu beweisen):

Theorem 4.20 (Kamp)
Zu jeder F1S-Formel $\varphi(x)$ mit einer freien Variablen existiert eine initial äquivalente LTL-Formel ψ.

Also ist LTL bzgl. Ausdrucksstärke nichts anderes als Logik erster Stufe!

(Es folgt auch: in LTL lassen sich genau die sternfreien Sprachen definieren.)

LTL: Komplexität

Bei der Übersetzung F1S $\Rightarrow$ LTL kann die Formel nicht-elementar größer werden.

Diese Differenz in der Knappheit (engl. *Succinctness*) schlägt sich in der Komplexität von Erfüllbarkeit/Gültigkeit wieder:

Theorem 4.21
Das Erfüllbarkeitsproblem und das Gültigkeitsproblem sind

- PSpace-vollständig in LTL
- nicht-elementar in F1S (und S1S)

Das Auswertungsproblem ist für LTL ebenfalls PSpace-vollständig, wie für MSO/S1S und F1S.

Beide Probleme werden einfacher (NP-vollständig), wenn man nicht alle temporalen Operatoren zulässt (z. B. nur $\Diamond, \Box$ oder nur $\bigcirc$)

Weitere Verifikationslogiken

Es gibt in der Verifikation noch **andere wichtige Logiken,** z. B.:

- CTL, CTL* und das μ-Kalkül für Baumstrukturen

  (*Branching time:* es gibt mehr als eine mögliche Zukunft, z. B. wegen unbekannter Benutzer-/Sensoreingabe)

- das temporale μ-Kalkül für lineare Strukturen (wie LTL)

Insbesondere hat das temporale μ-Kalkül dieselbe Ausdrucksstärke wie S1S.

Prädikatenlogik zweiter Stufe

Deskriptive Komplexitätstheorie

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen (Fragmenten von) SO und verschiedenen in der Informatik wichtigen Komplexitätsklassen.

Grundlegende Beobachtung:

> Die in existentieller SO definierbaren Entscheidungsprobleme sind exakt die Probleme in der Komplexitätsklasse NP.

„Existentielle SO" (ESO) bedeutet dabei Formeln der Form

$$\exists X_1 \cdots \exists X_n \, \varphi, \quad X_i \text{ beliebige Arität und } \varphi \text{ FO-Formel}$$

Diese und ähnliche Beobachtungen erlauben ein Studium von komplexitätstheoretischen Fragen wie „P vs. NP" mit logischen Mitteln.

Man nennt diese Forschungsrichtung **Deskriptive Komplexitätstheorie.**

Deskriptive Komplexitätstheorie – Beispiel 1

3-Färbbarkeit ist ein wohlbekanntes NP-vollständiges Problem:

Definition 4.22 (3-Färbbarkeit)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *3-färbbar,* wenn es eine Abbildung $f : V \to \{r, g, b\}$ gibt, so dass gilt:

- Für alle $\{v_1, v_2\} \in E$ ist $f(v_1) \neq f(v_2)$.

3F ist die Klasse aller 3-färbbaren Graphen.

Betrachte

$$\varphi_{\text{3F}} = \exists C_1 \exists C_2 \exists C_3 \Big(\forall x \forall y \, \big((C_1(x) \lor C_2(x) \lor C_3(x)) \land \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} \neg(C_i(x) \land C_j(x)) \land E(x,y) \to \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \neg(C_i(x) \land C_i(y)) \, \big) \Big)$$

Dieser ESO-Satz *definiert* 3F:

$G \models \varphi_{\text{3F}}$ gdw. $G \in$ 3F für alle ungerichteten Graphen G

Deskriptive Komplexitätstheorie – Beispiel 2

Hamiltonkreis-Problem ist ein weiteres NP-vollständiges Problem:

Definition 4.23 (Hamiltonkreis)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein *Hamiltonkreis* in G ist ein geschlossener Pfad, der jeden Knoten genau einmal enthält.

HK ist die Klasse aller Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten.

Der folgende ESO-Satz definiert HK:

$\varphi_{\text{HK}} = \exists L \, \exists S \, \big($ L ist strikte lineare Ordnung $\land$
alle Elemente des Universums kommen in L vor $\land$
S ist Nachfolgerrelation von L,
verbindet zusätzlich größtes L-Element mit kleinstem $\land$
$\forall x \forall y \, (S(x,y) \to E(x,y)) \, \big)$

binär

$G \models \varphi_{\text{HK}}$ gdw. $G \in$ HK für alle ungerichteten Graphen G

T4.19

Entscheidungsprobleme als Klassen von Strukturen

Wenn man mit **Turingmaschinen** arbeitet, repräsentiert man

- Probleminstanzen als Wörter
- Entscheidungsprobleme als Sprachen (Mengen von Wörtern)

Wir stellen hier **Logik** in den Mittelpunkt, repräsentieren

- Probleminstanzen als endliche relationale Strukturen
- Entscheidungsprobleme als Klassen von solchen Strukturen

Dies stellt **keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit** dar:

Jedes Entscheidungsproblem kann sowohl als Menge von Wörtern als auch als Klasse von endlichen Strukturen dargestellt werden.

ESO-Definierbarkeit

Also ab jetzt: *Problem* = Klasse von endlichen relationalen Strukturen

Definition 4.24 (ESO-definierbare Probleme)

Ein Problem K ist *ESO-definierbar,*
wenn es einen ESO-Satz φ_K gibt, so dass

$\mathfrak{A} \in K$ gdw. $\mathfrak{A} \models \varphi_K$ für alle endlichen Strukturen $\mathfrak{A}$

Schon gesehen: 3F und HK sind ESO-definierbar.

Es gilt sogar: NP = Menge der ESO-definierbaren Probleme

→ Müssen zunächst klären, wie man eine endliche relationale Struktur als Wort darstellt.

Kodierung von Strukturen

Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Wir fixieren eine beliebige lineare Ordnung auf A, z. B. $a_1 \prec \cdots \prec a_n$.

Eine einzelne k-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}}$ wird wie folgt kodiert:

- betrachte die *lexikographische Ordnung* aller k-Tupel über A:

  $$(a_1, \dots, a_1), (a_1, \dots, a_1, a_2), \cdots, (a_n, \dots, a_n, a_{n-1}), (a_n, \dots, a_n)$$

  (entspricht Zählen zur Basis n)

- repräsentiere $R^{\mathfrak{A}}$ als Wort $w_R \in \{0,1\}^*$ der Länge n^k:

  das i-te Symbol ist $\begin{cases} 1 & \text{wenn das } i\text{-te } k\text{-Tupel in } R^{\mathfrak{A}} \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

T4.20

Für $\tau = \{R_1, \dots, R_\ell\}$ und s_j = Stelligkeit(R_j) repräsentieren wir $\mathfrak{A}$ als Wort

$$w_{\mathfrak{A}} = \underbrace{0^n 1}_{\text{Größe } \mathfrak{A}} \; \underbrace{0^{s_1} 1 w_{R_1}}_{R_1^{\mathfrak{A}}} \; \underbrace{0^{s_2} 1 w_{R_2}}_{R_2^{\mathfrak{A}}} \cdots \underbrace{0^{s_\ell} 1 w_{R_\ell}}_{R_\ell^{\mathfrak{A}}}$$

T4.20 fortgesetzt

NP via Strukturen

$$w_{\mathfrak{A}} = \underbrace{0^n 1}_{\text{Größe } \mathfrak{A}} \; \underbrace{0^{s_1} 1 w_{R_1}}_{R_1^{\mathfrak{A}}} \; \underbrace{0^{s_2} 1 w_{R_2}}_{R_2^{\mathfrak{A}}} \cdots \underbrace{0^{s_\ell} 1 w_{R_\ell}}_{R_\ell^{\mathfrak{A}}}$$

Beachte:

- das Präfix $0^n 1$ kodiert die (endliche) Größe von $\mathfrak{A}$
- Infixe 0^{s_j} kodieren die Stelligkeiten der R_j
- ohne diese Information kann man aus $w_{R_1} \cdots w_{R_\ell}$ die Relationen $R_1^{\mathfrak{A}}, \dots, R_\ell^{\mathfrak{A}}$ nicht auf eindeutige Weise extrahieren

„Unsere“ Definition von NP ist nun wie folgt:

Ein Problem (Klasse von endlichen relationalen Strukturen) K ist *in NP,*
wenn es eine nichtdeterministische Turingmaschine M_K gibt, so dass:

1. $\mathfrak{A} \in K$ gdw. $w_{\mathfrak{A}} \in L(M_K)$
2. bei Eingabe $w_{\mathfrak{A}}$ terminiert M_K in Zeit poly$(|w_{\mathfrak{A}}|)$

Beachte zu Punkt 2: $|w_{\mathfrak{A}}|$ ist polynomiell in der Größe von $\mathfrak{A}$

Satz von Fagin

Theorem 4.25 (Fagin)

Für jedes Problem K gilt: K ist in NP gdw. K ist ESO-definierbar.

Man sagt auch: ESO *erfasst* (engl. *captures*) NP.

Dieses Theorem stellt eine vollkommen maschinenunabhängige Charakterisierung von NP zur Verfügung.

Es reduziert das schwierige Problem der Trennung von Komplexitätsklassen (z. B. P von NP) auf ein rein logisches Problem.

Leider ist bis heute im Allgemeinen nicht klar,
welche Logik der Komplexitätsklasse P entspricht.

Satz von Fagin

Theorem 4.25 (Fagin)
Für jedes Problem K gilt: K ist in NP gdw. K ist ESO-definierbar.

Leichte Folgerung:

Korollar 4.26
Für jedes Problem K gilt: K ist in coNP gdw. K ist USO-definierbar.
(USO $=$ universelles SO)

Das „NP vs. coNP"-Problem ist also: haben ESO und USO auf endlichen relationalen Strukturen dieselbe Ausdrucksstärke?

Beachte: wenn man NP ≠ coNP zeigen könnte (wie allgemein vermutet), dann würde daraus auch P ≠ NP folgen!

Satz von Fagin – Beweis

Theorem 4.25 (Fagin)
Für jedes Problem K gilt: K ist in NP gdw. K ist ESO-definierbar.

Die einfache Richtung des Beweises ist die folgende:

Lemma 4.27
Jedes ESO-definierbare Problem K ist in NP.
Mit anderen Worten: ESO-Auswertung ist in NP bzgl. Datenkomplexität.

T4.21

Strategie für Gegenrichtung:

Zeige, dass es für jede nichtdeterministische Polyzeit-Turingmaschine M einen ESO-Satz φ_M gibt, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi_M$ gdw. $w_{\mathfrak{A}} \in L(M)$ für alle $\mathfrak{A}$.

Satz von Fagin – Beweis

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Q_A, Q_R)$, wobei

- $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ Zustandsmenge, $\Sigma = \{0, 1\}$ Eingabealphabet
- $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_\ell\} \supseteq \Sigma$ Arbeitsalphabet mit Blanksymbol $\perp \in \Gamma$
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times \{L, R\}$ Übergangsrelation
- $q_0 \in Q$ Startzustand
- $Q_A, Q_R \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden bzw. verwerfenden Zustände

Das Arbeitsband ist einseitig unendlich; der Kopf und die Eingabe stehen anfangs ganz links; wir nehmen an, dass M

1. auf jeder Eingabe der Länge n maximal n^k Schritte macht
2. am linken Ende des Bandes niemals einen Schritt nach links versucht
3. bei Zustand in $Q \setminus (Q_A \cup Q_R)$ immer mindestens einen Übergang zur Verfügung hat, bei Zustand in $Q_A \cup Q_R$ jedoch keinen Übergang

Satz von Fagin – Beweis

Die Formel φ_M soll einen akzeptierenden Lauf von M auf der Eingabe simulieren, wenn so ein Lauf existiert.

Schwierigkeit:

- uns steht eine Struktur $\mathfrak{A}$ der Größe $|A|$ zur Verfügung
- wir müssen Bandinhalte, Zustände und Kopfpositionen eines Laufes der Länge $|w_{\mathfrak{A}}|^k$ repräsentieren

Lösung:

- wähle ein k' so dass $|A|^{k'} \geq |w_{\mathfrak{A}}|^k$
- repräsentiere Schrittzähler und Bandposition als k'-Tupel über A, verwende beliebige (strikte) lineare Ordnung über $A^{k'}$ zur Repräsentation der „Reihenfolge"

T4.22

Satz von Fagin – Beweis

Der Satz φ_M hat die Form

$$\exists L \exists T_{a_0} \cdots \exists T_{a_\ell} \exists H_{q_1} \cdots \exists H_{q_m} \, \psi$$

wobei alle Relationsvariablen $(2 \cdot k')$-stellig sind und

- L die strikte lineare Ordnung repräsentiert
- $T_{a_i}(\overline{p}, \overline{t})$ ausdrückt, dass Bandzelle $\overline{p}$ zum Zeitpunkt $\overline{t}$ das Symbol a_i enthält
- $H_{q_i}(\overline{p}, \overline{t})$ ausdrückt, dass M zum Zeitpunkt $\overline{t}$ in Zustand q_i ist und der Kopf sich auf Bandzelle $\overline{p}$ befindet

Die Formel ψ beschreibt nun das Verhalten von M.

Satz von Fagin – Beweis

Die Formel ψ besteht aus folgenden Konjunkten:

- ψ_{lin} drückt aus, dass L lineare Ordnung ist
- ψ_{ok} stellt sicher, dass Bandsymbole und Zustand eindeutig sind
- ψ_{move} erzwingt, dass alle Übergänge Δ entsprechen
- ψ_{acc} fordert, dass ein akzeptierender Zustand erreicht wird
- ψ_{const} stellt sicher, dass sich der Inhalt von Bandzellen, die sich nicht unter dem Kopf befinden, bei einem Übergang nicht ändert
- ψ_{ini} beschreibt die Startkonfiguration: Band beschriftet mit Eingabe gefolgt von Blanks, Kopf ganz links, M in Startzustand

T4.23

Satz von Fagin – Beweis

Zusammenfassung:

- Die SO-Variablen erlauben es, die Berechnung einer Turingmaschine zu beschreiben.
- Die existentielle SO-Quantifizierung von ESO entspricht dem Nichtdeterminismus der TM.
- Die Definierbarkeit einer linearen Ordnung erlaubt es, die „Reihenfolge“ der Bandpositionen und Schritte zu repräsentieren.
- Es ergeben sich technische Schwierigkeiten aus den unterschiedlichen Kodierungen von Probleminstanzen als Graphen und Wörter; die lassen sich aber lösen.

Deskriptive Komplexitätstheorie

Welche Logik könnte die Komplexitätsklasse P erfassen?

- FO ist viel zu schwach, kann einfache P-Probleme nicht ausdrücken wie EVEN oder Zusammenhang.
- Das in diesem Zusammenhang frappierendste Defizit von FO ist: es gibt keinen Rekursionsmechanismus.
- (E)SO erlaubt Rekursion, ist aber offensichtlich zu ausdrucksstark.

Fixpunktoperatoren stellen einen schwächeren Rekursionsmechanismus dar als SO-Quantifikation.

Tatsächlich erfasst *LFP* (die Erweiterung von FO um Fixpunktoperatoren) genau P, wenn man annimmt, dass die Eingabestrukturen mit einer linearen Ordnung < ausgestattet sind.

Deskriptive Komplexitätstheorie

Leider: in vielen natürlichen Problemen wie 3F oder HK gibt es keine „eingebaute Ordnung".

In LFP ist diese Ordnung auch nicht definierbar.

Was wie ein kleines technisches Hindernis aussieht, stellt sich als großes Problem heraus.

Es wurde sogar vermutet, dass es keine Logik gibt, die P erfasst (basierend auf einer vernünftigen Definition von „Logik"; Gurevich).

Wenn das so ist, ist es schwer zu beweisen, denn es impliziert natürlich $P \neq NP$.