

Logik

WiSe 2018/19

Thomas Schneider

# Nichtklassische Logiken – ein Überblick

Homepage der Vorlesung: <http://tinyurl.com/ws1819-logic>



# Nichtklassische Logiken

Die in dieser Vorlesung betrachteten Logiken (Aussagen-, Prädikatenlogik) bezeichnet man oft als **klassische Logiken**.

Es gibt aber noch viele weitere Logiken: **nichtklassische Logiken**

**Ursprünge:** teils Philosophie/Mathematik, teils Informatik

**Zwei Gruppen:**

Erweiterungen klassischer Logiken

„Rivalen“ (alternative Ansätze)

**Es folgt:** ein Überblick über die Landschaft

# Beispiele nichtklassischer Logiken

## Erweiterungen klassischer Logiken

- Modallogik
  - Temporallogik
  - epistemische Logik
  - dynamische Logik
- Beschreibungslogik

## „Rivalen“

- intuitionistische Logik
- mehrwertige Logik
- Fuzzy-Logik
- nicht-monotone Logiken
- probabilistische Logiken
- ...

**Kombinationen** sind auch möglich

z. B. temporale/probabilistische Beschreibungslogik, modale Prädikatenlogik

**Modallogik**

# Modallogik: Überblick

ist eine Erweiterung der Aussagenlogik um modale Operatoren  $\diamond$  und  $\square$

Ursprünge in Philosophie;

heutzutage viele Varianten mit Anwendungen in der Informatik:

Variante	Anwendung	Bedeutung der modalen Operatoren
Temporallogik	zeitliches Schließen	$\square$ „immer in der Zukunft“ $\diamond$ „irgendwann in der Zukunft“
Epistemische L.	Multiagentensysteme	$\square$ „Agent weiß/glaubt ...“ $\diamond$ „Agent hält ... für möglich“
Dynamische L.	Schließen über Programmverhalten	$\square$ „Nach jeder Ausführung ...“ $\diamond$ „Es gibt eine Ausführung, so dass ...“

...

# Modallogik: Beispielformeln

## Beispielformeln

$$\bigwedge_{i \in \{1,2\}} \Box(W_i \rightarrow \Diamond A_i)$$

„Jede Anforderung ( $W_i$ ) wird irgendwann mal erfüllt ( $A_i$ )“

$$\Diamond_i \varphi \rightarrow \bigwedge_j \Box_j \Diamond_i \varphi$$

„Wenn die  $i$ -te Agentin  $\varphi$  für möglich hält, dann wissen das alle Agentinnen, dass die  $i$ -te Agentin  $\varphi$  für möglich hält.“

$$\Box_{p+q} \varphi \rightarrow \Box_p \varphi \wedge \Box_q \varphi$$

„Wenn nach jeder nichtdeterministischen Ausführung von Programm  $p$  oder  $q$  Eigenschaft  $\varphi$  gilt, dann auch nach jeder deterministischen Ausführung von  $p$  bzw.  $q$ .“

oft noch weitere Operatoren,

z. B. „Until“ in Temporallogik, „Common knowledge“ in epistemischer Logik

## Semantik

basiert auf **Kripke-Strukturen**, einer speziellen Sorte FO-Strukturen:

- Elemente des Universums heißen **Welten**
- Aussagenvariablen werden wie **unäre Relationssymbole** interpretiert
- für  $\diamond$  und  $\square$  gibt es eine (oder mehrere) **binäre Relationen**
- es gibt **keine Funktionssymbole**

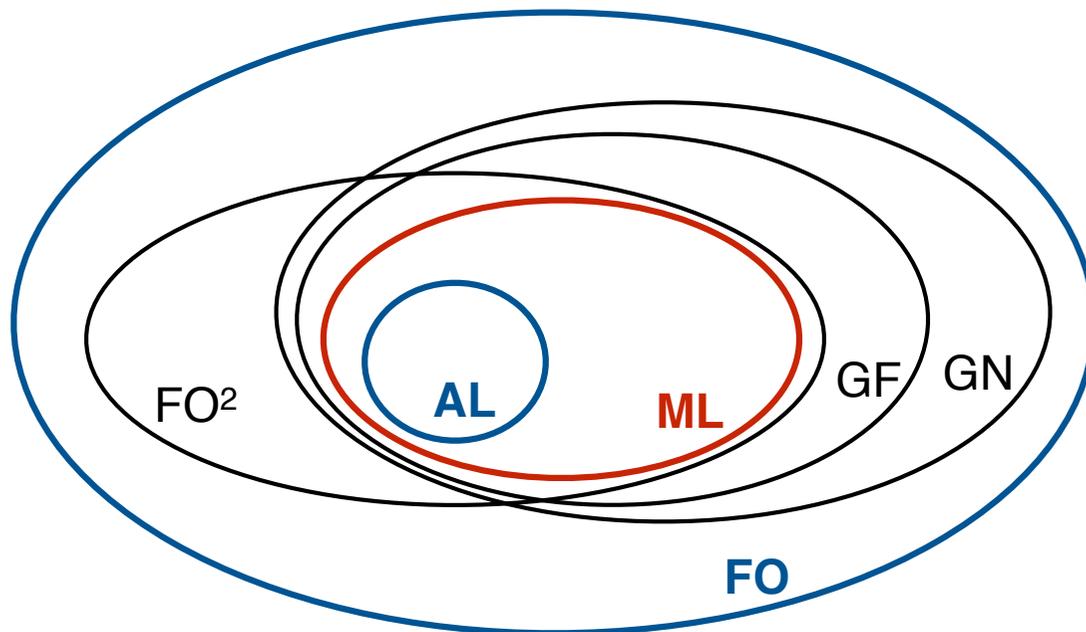
Wegen des engen Zusammenhangs zwischen Kripke- und FO-Semantik kann Modallogik als ein **Fragment von FO** betrachtet werden.

## Standard Translation:

Modallogik-Formel  $\varphi \rightsquigarrow$  FO-Formel  $\hat{\varphi}(x)$

(analog zur Übersetzung von LTL nach F1S)

# Einbettung in klassische Logiken



$FO^2 = FO$  mit nur 2 Variablen  $x, y$

GF, GN:

„guarded fragment“,

„guarded negation“;

schränken Verwendung  
von  $\exists$  bzw.  $\neg$  ein

Modallogik „erbt gutes Verhalten“ von  $FO^2$  und GF:  
Entscheidbarkeit, Baummodelleigenschaft usw.

Erfüllbarkeit etc. in „Standard“-Modallogik sind PSpace-vollständig;  
Auswertung geht in Polyzeit.

## Beschreibungslogik

# Beschreibungslogik

... bezeichnet eine wichtige Familie von Formalismen für  
**Wissensrepräsentation**

... ist eigentlich Modallogik mit alternativer Syntax

**Aber Wissen kann man doch auch mit FO repräsentieren?**

**Stimmt**, aber das ist **nicht immer einfach** (für Menschen wie Computer):

Wie lange braucht ihr zum Lesen der Formel

$$\forall x \exists y \forall z \left( R(x, y) \wedge S(y, z) \rightarrow \neg S(c, y) \vee R(x, z) \right) ?$$

Oder zum Überprüfen, ob sie äquivalent ist zu

$$\forall x \exists y \forall z \left( R(x, z) \wedge \neg R(x, y) \vee \neg S(y, z) \vee \neg S(c, y) \right) ?$$

# Beschreibungslogik

... erlaubt es, **terminologisches** oder **konzeptuelles Wissen** intuitiv zu repräsentieren und daraus Schlüsse zu ziehen

- **Terminologisches Wissen** (Begriffe und deren Beziehungen) aus einem Anwendungsgebiet wird formalisiert und in einer **TBox** gespeichert
  - z. B. „Koalas sind Beuteltiere, die Eukalyptus essen“  
„Beuteltiere sind keine Vögel“
- Durch **logisches Schließen** wird implizites Wissen sichtbar gemacht
  - z. B. „Ist jedes Beuteltier ein Säugetier?“  
„Kann es Eukalyptus essende Vögel geben?“  
„Sind Koalas Vögel?“
- Fakten über Individuen/Objekte werden in einer **ABox** gespeichert
- **Logisches Schließen** über **Konzepte und Individuen**:
  - z. B. „Sind meine Fakten konsistent mit der Terminologie?“  
„Ist Sid ein Faultier?“

# Beschreibungslogik

## Zentrale Elemente der Wissensrepräsentation mit BL:

- Konzepte

beschreiben **Klasse von Objekten**

z. B. Student\_in, Vorlesung, Universität, Fachbereich, ...

können durch logische Ausdrücke (Formeln) beschrieben werden:

z. B. Mensch  $\sqcap \exists$  hört.Vorlesung

- Rollen

sind **binäre Relationen** zwischen Objekten

z. B. hört, lehrt, istTeilVon, ...

- TBoxen

**definieren** Konzepte und setzen diese **zueinander in Beziehung**

z. B. Student\_in  $\equiv$  Mensch  $\sqcap \exists$  hört.Vorlesung

- ABoxen

**beschreiben** Individuen/Objekte und deren **Eigenschaften**

z. B. Student\_in(anna) hört(anna, logikvorlesung)

# Ontologien

Ein sehr populärer Ansatz zur Wissensrepräsentation ist die Verwendung von **Ontologien**.

Ontologien dienen der Repräsentation von konzeptuellem Wissen, sehr ähnlich den TBoxen der Beschreibungslogik.

Im Prinzip kann eine Ontologie in beliebiger (meist logischer) Sprache verfasst werden.

Besonders populär ist aber **OWL: the Web Ontology Language**

- Standardisiert vom W3C (World Wide Web Consortium)
- Zugeschritten aufs Web: XML-Syntax etc.
- Im Wesentlichen eine (sehr ausdrucksstarke) Beschreibungslogik



# Beispiele für Ontologien

- Medizin
  - z. B. [SNOMED CT](#),  
international genutzte medizinische Terminologie  
mit über 320.000 Konzepten
- Biologie
  - z. B. die über 600 biomedizinischen Ontologien in [BioPortal](#)
- Semantisches Web
  - usw.

# Zusammengefasst ...

Beschreibungslogiken sind eine **Familie** von Logiken

- zur Repräsentation konzeptuellen Wissens
- mit entscheidbaren Schlussfolgerungsproblemen
- für die viele effiziente Reasoner zur Verfügung stehen

**Neugierig geworden?**

☛ siehe **Master-Kurs „Beschreibungslogik“** im Sommersemester

Mo 10–12, Mi 16–18, jeweils MZH 6210



**„Rivalen“ klassischer Logiken**

# Intuitionistische Logik

... ist syntaktisch Aussagenlogik

... kommt aus Mathematik;

**Grundidee:** ein Satz soll erst wahr sein,  
wenn ein Beweis dafür formuliert (**konstruiert**) ist. (Konstruktivismus)

... basiert deshalb **nicht** auf dem **Prinzip des ausgeschlossenen Dritten:**

$p \vee \neg p$  ist **nicht** beweisbar bzw. gültig

→ verwendet Variante des Hilbert-Kalküls mit schwächeren Axiomen  
und kompliziertere Semantik (z. B. Kripke-Strukturen!)

## Weitere Unterschiede zu Aussagenlogik:

- klassische Äquivalenzen wie De-Morgan oder  $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$   
sind nicht mehr beweisbar bzw. gültig
- Beweis für Disjunktion  $\varphi \vee \psi$  liefert immer Beweis für  $\varphi$  oder für  $\psi$

## Anwendung in Informatik:

Interaktive Theorembeweiser verwenden zur Beweiskonstruktion IL

# Mehrwertige Logiken

## Motivation

Repräsentation von Vagheit, unvollständiger Information  
(menschliche Wahrnehmung, Sensordaten usw.)

→ neben „wahr“ und „falsch“ weitere Wahrheitswerte

→ auch hier Trennung vom Prinzip des ausgeschlossenen Dritten

Ursprünge: Philosophie; Anwendung in Informatik, z. B. Fuzzy-Logik

## Beispiel für 3-wertige Logik:

(Lukasiewicz 1920, Kleene/Bochvar 1938)

$\varphi$	$\neg\varphi$	$\wedge$	f	u	w	...	f = falsch
f	w	f	f	f	f		u = unbestimmt
u	u	u	f	u	u		w = wahr
w	f	w	f	u	w		



**Was gibt es noch?**

# Was gibt es noch?

## Kombinationen von Logiken

- modale Prädikatenlogik
- Kombinationen verschiedener Modallogiken („mehrdimensionale Modallogiken“)
- temporale oder probabilistische oder nicht-monotone oder mehrwertige Beschreibungslogik
- Kombinationen von Logiken mit ähnlichen Formalismen

## Hier nicht eingeordnet

- Logic programming
- Datalog

Trotz ihrer verschiedenen Ursprünge haben alle hier vorgestellten Logiken Anwendungen in der Informatik

Viele Logiken fallen unter den allgemeineren Begriff

**Commonsense Reasoning** (KI-relevante Formalismen)

## Literaturhinweise (kleine Auswahl!)

- Anita Wasilewska. *Logics for Computer Science: Classical and Non-Classical*. Springer 2018 <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-92591-2>
- Ernest Davis. *Logical Formalizations of Commonsense Reasoning: A Survey*. J. Artif. Intell. Res. 59: 651–723 (2017)  
<https://doi.org/10.1613/jair.5339>
- Patrick Blackburn, Johan van Benthem, Frank Wolter. *Handbook of Modal Logic*. Elsevier 2007.  
<https://www.sciencedirect.com/science/bookseries/15702464/3>
- Franz Baader, Ian Horrocks, Carsten Lutz, Ulrike Sattler. *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press 2017  
<https://doi.org/10.1017/9781139025355>
- Grzegorz Malinowski. *Many-valued logic and its philosophy*. In Dov M. Gabbay, John Woods (Hrsg.): *Handbook of the History of Logic*, Band 8, Elsevier 2007. [http://dx.doi.org/10.1016/s1874-5857\(07\)80004-5](http://dx.doi.org/10.1016/s1874-5857(07)80004-5)

# Fast fertig für dieses Semester ...

Thank you!

¡Gracias!

Merci !

Dank u allen!

Dziękuję!

Vielen Dank für  
Eure Aufmerksamkeit.

Kiitos!

Baie dankie!

Vā mulțumim!

Obrigado!

Спасибо!

Ευχαριστώ!