Prof. Dr. Thomas Schneider

Logik

Fragebogen 1 vom 22. 10.

1. Wenn $|\mathsf{Var}(\varphi)| = n$, wie viele Zeilen hat die Wahrheitstafel für φ?

○ n ○ n^2 ○ 2^n ○ $2 \cdot 2^n$ ○ 2^{2^n}

2. Sind die zweistelligen Junktoren $\to$, $\leftrightarrow$ idempotent, kommutativ und assoziativ? Wie ist das für den zweistelligen Junktor $\oplus$, definiert als $\varphi \oplus \psi = (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$?

Junktor	idempotent	kommutativ?	assoziativ?
$\to$			
$\leftrightarrow$			
$\oplus$			

3. Sei $n \geq 0$. Wie groß ist $\mathcal{B}^n$, d. h. wie viele n-stellige Boolesche Funktionen gibt es?

○ n ○ n^2 ○ 2^n ○ $2 \cdot 2^n$ ○ 2^{2^n}

4. Gib die Bedeutung der folgenden Begriffe in eigenen Worten wieder:

a) „Die Aussagenlogik ist funktional vollständig.“

____

____

b) „Die Junktormenge M ist funktional vollständig.“

____

____

5. Vervollständige:

a) Eine KNF-Formel ist eine _____junktion von _____junktionen von ___________en.

b) Eine DNF-Formel ist eine _____junktion von _____junktionen von ___________en.

6. Welche der folgenden Mengen von Junktoren sind funktional vollständig?

$\square$ $\{\neg, \wedge, \vee\}$ $\square$ $\{\neg, \wedge\}$ $\square$ $\{\neg, \to\}$ $\square$ $\{\wedge, \vee, \to\}$ $\square$ $\{|\}$ $\square^*$ $\{\oplus, \to\}$

Bitte wenden.

Äquivalenz: Ersetzungslemma

Äquivalente Formeln sind austauschbar:

Lemma 1.8 (Ersetzungslemma)

Seien φ and ψ äquivalente Formeln, ϑ eine Formel mit $\varphi \in \mathrm{TF}(\vartheta)$ und ϑ' eine Formel, die sich aus ϑ ergibt, indem ein beliebiges Vorkommen von φ durch ψ ersetzt wird. Dann gilt $\vartheta \equiv \vartheta'$.

T1.2

Beweis per Induktion über die Struktur von ϑ.

Allgemeines Vorgehen beim Induktionsbeweis:

Induktionsanfang:
Zeige die Aussage für alle atomaren Formeln $\vartheta \in \{0, 1\} \cup$ VAR.

Induktionsschritt: Zeige:
Wenn die Aussage für ϑ_1 und ϑ_2 gilt, (Induktionsvoraussetzung, IV)
dann auch für $\neg\vartheta_1$, $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$ und $\vartheta_1 \vee \vartheta_2$. (Induktionsbehauptung)

T1.3

Aussagenlog. Formeln versus Boolesche Funktionen

Jede aussagenlogische Formel φ mit $|\mathrm{Var}(\varphi)| = n$ berechnet n-stellige Boolesche Funktion f_φ:

- O. B. d. A. sei $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Belegung V für φ entspricht Eingabe für f_φ:
  i-ter Eingabewert ist $V(x_i)$
- Wert von f_φ bei Eingabe/Belegung V ist $V(\varphi)$

T1.4

Genau diese Funktion stellen wir in der Wahrheitstafel dar!

Umgekehrt findet sich zu jeder Booleschen Funktion auch eine Formel:

Theorem 1.10 (funktionale Vollständigkeit)

Zu jeder Booleschen Funktion $f \in \mathcal{B}$ gibt es eine Formel φ mit $f_\varphi = f$.

T1.5

Normalformen

Theorem 1.12 (KNF/DNF-Umwandlung)

Jede Formel lässt sich effektiv in eine äquivalente Formel in KNF bzw. DNF wandeln.

T1.6

Beispiel:

$\varphi = (y \vee \neg(x \vee y)) \wedge \neg z$

x	y	z	$V(\varphi)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

DNF:

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$$

KNF:

$$\neg\Big((\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee\ (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \Big)$$

$$\equiv$$

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge\ (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$$

Funktionale Vollständigkeit von Junktorenmengen

Die Konstanten 0,1 und die Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ können als Boolesche Funktionen aus $\mathcal{B}^0$, $\mathcal{B}^1$, bzw. $\mathcal{B}^2$ aufgefasst werden.

Umgekehrt liefert jede Boolesche Funktion $f \in \mathcal{B}^n$ einen n-ären Junktor: Zeile $t = (w_1, \ldots, w_n) \in \{0, 1\}^n$ in Wahrheitstafel hat Wert $f(t)$.

T1.7

Wir werden im Folgenden nicht streng zwischen Junktoren und Booleschen Funktionen unterscheiden.

Weitere interessante Junktoren neben $0, 1, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ z.B.:

Exklusives Oder

$V(\varphi)$	$V(\psi)$	$V(\varphi \oplus \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Nand

$V(\varphi)$	$V(\psi)$	$V(\varphi \mid \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0