Prof. Dr. Thomas Schneider

Logik
Fragebogen 13 vom 17. 12.

---

1. Kann man mit dem Kompaktheitssatz zeigen, dass eine Eigenschaft …

- ☐ … beliebiger Strukturen nicht ausdrückbar ist?
- ☐ … endlicher Strukturen nicht ausdrückbar ist?
- ☐ … unendlicher Strukturen nicht ausdrückbar ist?

2. Welche Bedingungen muss ein partieller Isomorphismus $\delta : A \to B$ erfüllen?

- ☐ δ ist eine Bijektion.
- ☐ δ ist total (für alle $a \in A$ gibt es $b \in B$ mit $\delta(a) = b$).
- ☐ Für alle n-stelligen Relationssymbole R und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt: $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ gdw. $(\delta(a_1), \dots, \delta(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.
- ☐ Für alle n-stelligen Relationssymbole R und alle $a_1, \dots, a_n \in \mathsf{dom}(\delta)$ gilt: $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ gdw. $(\delta(a_1), \dots, \delta(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

3. In den folgenden Aussagen über Gewinnstrategien (GS) streiche Unzutreffendes (unterstrichene Stellen) bzw. vervollständige. Die Wurzel eines Baums habe Tiefe 0.

a) Eine GS im Spiel $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist ein endlicher Baum der Tiefe $\underline{k}$ / $\underline{2k}$ / $\underline{\infty}$.

b) Jeder Knoten der Tiefe $1, 3, 5, \dots$ steht für Züge von *Spoiler* / *Duplicator* ;
jeder Knoten der Tiefe $2, 4, 6, \dots$ steht für Züge von *Spoiler* / *Duplicator* .

c) In einer GS für *Duplicator* hat jeder Knoten ungerader Tiefe genau 1 Nachfolger (erfolgreicher Spielzug von *Duplicator*) und jeder Knoten ungerader Tiefe so viele Nachfolger, wie es zu diesem Zeitpunkt Spielzüge von *Spoiler* gibt.

d) In einer GS für *Duplicator* definiert außerdem die Knotenbeschriftung *mindestens eines* / *eines jeden* Pfades einen partiellen Isomorphismus.

e) Eine GS für *Spoiler* unterscheiden sich wie folgt von einer GS für *Duplicator*:

- In c) muss ____________________ mit ____________________ vertauscht werden.
- In d) muss ____ .

4. Wie kann man die Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ im 2. Beispiel für Gewinnstrategien ändern, damit *Spoiler* eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat?

- ☐ einen Kreis in $\mathfrak{B}$ erzeugen: Kante von b_4 nach b_1 hinzufügen
- ☐ alle Kanten in $\mathfrak{B}$ symmetrisch machen (d. h. Rückrichtung hinzufügen)
- ☐ alle Kanten in $\mathfrak{A}$ löschen
- ☐ reflexive Kante zu einem Element aus $\mathfrak{B}$ hinzufügen
- ☐ reflexive Kante zu einem Element aus $\mathfrak{A}$ hinzufügen
- ☐ reflexive Kante zu einem Element aus $\mathfrak{A}$ und einem Element aus $\mathfrak{B}$ hinzufügen

Bitte wenden.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Zwei Spielerinnen: *Spoiler* (auch: Herausforderer) und *Duplicator*

Spielbrett besteht aus zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (endlich oder unendlich).

Spielverlauf:

- Die Spielerinnen wechseln sich ab; *Spoiler* beginnt.
- Die zu spielende Rundenzahl k ist beliebig, aber vorher festgelegt.
- In jeder Runde wählt *Spoiler* zunächst eine Struktur ($\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$), dann ein Element der gewählten Struktur.
  Duplicator antwortet mit einem Element der anderen Struktur.

Idee: *Spoiler* möchte zeigen, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterschiedlich sind; *Duplicator*, dass sie gleich sind.

Die genaue Gewinnbedingung werden wir gleich definieren.

T3.10

Gewinnbedingung

Der Einfachheit halber arbeiten wir im Folgenden mit *relationalen* Signaturen.

Wenn $\mathfrak{A}$ Struktur und $S \subseteq A$, so ist $\mathfrak{A}|_S$ die *Einschränkung* von $\mathfrak{A}$ auf S:

- das Universum von $\mathfrak{A}|_S$ ist S
- für alle n-stelligen Relationssymbole R:

$$R^{\mathfrak{A}|_S} = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \mid a_1, \dots, a_n \in S\}$$

Definition 3.17 (partieller Isomorphismus)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen und $\delta : A \to B$ eine partielle Funktion mit Definitionsbereich dom(δ) und Wertebereich ran(δ).

Dann ist δ ein *partieller Isomorphismus,* wenn δ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}|_{\mathsf{dom}(\delta)}$ nach $\mathfrak{B}|_{\mathsf{ran}(\delta)}$ ist.

T3.11

Gewinnstrategien

- Das Spiel auf $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$ mit k Zügen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
- Eine Spielerin *hat eine Gewinnstrategie* für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn sie dieses Spiel gewinnen kann, egal, was die Gegnerin tut.
- Gewinnstrategien für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ kann man anschaulich als endliche Spielbäume der Tiefe k darstellen.
- Für jedes Spiel $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat *Spoiler* oder *Duplicator* eine Gewinnstrategie.
  (Denn das gilt für alle endlichen 2-Personen-Spiele, in denen kein Unentschieden möglich ist.)

Beispiele

T3.12

Ehrenfeucht-Fraïssé-Theorem

Theorem 3.19 (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Für alle $k \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$ für alle Sätze $\varphi \in$ FO(τ) mit qr$(\varphi) \leq k$
2. *Duplicator* hat Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Beachte: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ können hier endlich oder unendlich sein.

T3.13

Beweisidee:

- per Induktion über k
- Damit die Induktion durchgeht, müssen wir Spiele betrachten, die schon einige Runden gespielt wurden.
- In Punkt 1 müssen wir dann auch freie Variablen betrachten.

Vollständiger Beweis im Skript von Grädel [StudIP]